UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT
UFR de Mathématiques

Thèse

pour l'obtention du Diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7

Spécialité : Mathématiques (Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique)

Présentée par
MARTIN HILS

Fusion libre et autres constructions génériques

---

soutenue le 12 octobre 2006

Directeurs :
Zoé CHATZIDAKIS
Frank O. WAGNER

Rapporteurs :
Ehud HRUSHOVSKI
Anand PILLAY

Jury :
Élisabeth BOUSCAREN
Zoé CHATZIDAKIS
Françoise DELON
Frank O. WAGNER
Martin ZIEGLER
Boris ZILBER

Meinen Eltern

Remerciements

Je tiens avant tout remercier mes directeurs de thèse, Zoé Chatzidakis et Frank Wagner qui m'ont aidé, m'ont soutenu et encouragé tout au long de la préparation de ma thèse, pendant les périodes de productivité ainsi que pendant mes moments d'errance et de changement d'orientation. C'est aussi avec Zoé Chatzidakis que j'ai préparé mon mémoire de DEA, et c'est donc elle qui a guidé mes premiers pas dans la recherche. Je la remercie également pour ses questions, sa lecture attentive du manuscrit et pour ses commentaires et corrections. Je voudrais exprimer ma très grande gratitude à Frank Wagner pour ses conseils mathématiques et sa disponibilité constante.

Je suis très reconnaissant à Florian Pop qui m'a transmis son enthousiasme pour les mathématiques. C'est lui qui, lors de la préparation de mon "Diplomarbeit" à Bonn, m'a fait connnaître suffisamment de théorie des modèles pour que je choisisse de consacrer mes études doctorales à ce domaine fascinant. Ainsi m'est venue l'idée de suivre les cours du D.E.A. de logique à Paris 7.

Le troisième chapitre de la thèse doit beaucoup à une collaboration fructueuse avec Assaf Hasson, et je lui suis très reconnaissant. Je remercie également Massoud Pourmahdian pour ses suggestions par rapport à la fusion dans le cas simple. Un grand merci à Bruno Poizat pour de multiples discussions et pour ses suggestions diverses.

Je remercie vivement mes rapporteurs Ehud Hrushovski et Anand Pillay d'avoir accepté cette tâche et de l'avoir accomplie en un si bref délai. Merci également à Élisabeth Bouscaren, Françoise Delon, Martin Ziegler et Boris Zilber de m'honorer par leur présence dans le jury.

J'ai apprécié l'accueil chaleureux à l'Institut Girard Desargues à Lyon où j'ai passé les trois premières années de ma thèse ; je remercie particulièrement les autres thésards du 111b : Sophie, Florence, JB, Laurian et Juan.

Merci à l'Équipe de Logique de Paris 7, pour le temps que j'y ai passé pendant le D.E.A ainsi que pendant mes passages sporadiques. Je remercie également Andreas Baudisch et tout le département de logique à l'Université Humboldt de Berlin où j'ai passé ma dernière année de thèse et où j'ai pu effectuer la partie essentielle de la rédaction dans les meilleures conditions.

Merci à Thomas Blossier pour sa lecture attentive de larges parties du manuscrit (et pour tout le reste).

Je voudrais remercier Monique Gaffier (Lyon) et Khadija Bayoud pour leur soutien administratif, et surtout Michèle Wasse pour son efficacité, sa disponibilité et sa patience.

Enfin, je n'oublie pas mes amis et ma famille. Sans leur soutien, cette thèse n'existerait pas. Merci de tout mon coeur à Julia et David.

Table des matières

Introduction

La théorie des modèles moderne est née avec le théorème de catégoricité de Morley, qui dit que si une théorie dans un langage dénombrable est catégorique en une cardinalité non-dénombrable, elle est catégorique en toute cardinalité non-dénombrable. D'après Baldwin et Lachlan [BL71] ses modèles sont premiers et minimaux au-dessus d'un ensemble fortement minimal définissable dans le modèle premier ; la cardinalité d'une base détermine donc le modèle à isomorphisme près. Ainsi, les ensembles fortement minimaux sont devenus l'un des objets principaux d'étude en théorie des modèles. On sait que dans tout ensemble fortement minimal, la clôture algébrique définit une prégéométrie, généralisant la dépendance linéaire dans un espace vectoriel et la dépendance algébrique dans un corps algébriquement clos.

Au cours de son vaste projet d'une *théorie de la classification*, Shelah a développé la théorie de la *stabilité* (voir [Sh90]). En introduisant la notion de la *déviation*, Shelah a montré que dans toute théorie stable T, on peut définir une notion d'indépendance qui généralise de loin celle présente dans une théorie fortement minimale ; ces idées ont largement influencé le développement du sujet.

À la fin des années 1970, Zilber a commencé une étude des structures totalement catégoriques (voir [Zi93] pour l'ensemble de ces travaux), étude reprise à l'ouest par Cherlin, Harrington et Lachlan [CHL85]. En particulier, ils ont classifié les géométries des ensembles fortemaux minimaux ω-catégoriques, et obtenu une coordinatisation d'une structure ω-catégorique et ω-stable par des ensembles fortement minimaux. On peut donc dire que les ensembles fortement minimaux sont les "éléments constitutifs" pour certaines théories de rang de Morley fini.

Au début des années 1980, Zilber formulait une conjecture qui exprimait que la liste des exemples de (géométrie de) théories fortement minimales jusqu'alors connues serait essentiellement complète. Voici une version de cette conjecture ou plutôt de cette *hypothèse structurelle* :

Conjecture de la trichotomie.

Soit T une théorie fortement minimale. Alors il y a trois cas :

(1) T a une géométrie triviale : $\mathrm{acl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{acl}(\{a\})$ pour tout A.

(2) T a une géométrie localement modulaire non-triviale (sa géométrie sera alors la géométrie projective ou affine au-dessus d'un corps gauche K).

(3) Si T n'est pas localement modulaire, T interprète un corps algébriquement clos.

De plus, le corps infini K promis dans (3) est *pur*, c'est à dire toute la structure induite sur K par T est définissable (avec paramètres) dans la seule structure de corps $(K, +, \cdot, 0, 1)$.

La conjecture de la trichotomie a énormément influencé la théorie des modèles ces dernières années, et — même si elle s'est avérée fausse — elle continue à influencer les travaux actuels, en particulier en stabilité (et même simplicité) géométrique. Dans des cas particuliers, on sait que la conjecture de la trichotomie est vraie, par exemple dans le contexte important des *géométries de Zariski* [HZ96]. Les résultats positifs partiels sont à l'origine d'applications profondes de la théorie des modèles en géométrie diophantienne [Hr96].

Cependant, en 1988 et par la suite, Hrushovski a montré que les deux parties de la conjecture de la trichotomie sont fausses, et cela de manière assez radicale dans les deux cas. En effet, il construit dans [Hr93] une théorie fortement minimale non-localement modulaire dans laquelle on ne peut pas interpréter de groupe infini (la construction *ab initio*). Puis, il réussit dans [Hr92] à *fusionner* deux théories fortement minimales T_1 et T_2 en une seule (si les deux théories ont la DMP, une certaine hypothèse de définissabilité), et cela de telle manière que les ensembles définissables dans T_1 et dans T_2 "interagissent le moins possible" dans la théorie de la fusion.

Dans les deux cas ("ab initio" et "fusion"), Hrushovski utilise une variation de la méthode d'amalgamation de Fraïssé pour construire la nouvelle théorie fortement minimale en question. La construction de la fusion peut être divisée en deux étapes (dont la première reste en partie implicite dans [Hr92]) :

fusion libre : Construction d'une classe $\mathcal{C}$ de structures finies (ou finiment engendrées) et d'une notion $\leq$ de *plongement fort* telle que $(\mathcal{C}, \leq)$ est (dénombrable et) a la propriété d'amalgamation et la propriété du plongement commun. Puis, montrer que la limite de Fraïssé de $(\mathcal{C}, \leq)$ est un modèle saturé d'une théorie du premier ordre T_ω, qui sera ω-stable de rang ω (en général). Il y a un unique 1-type générique (qui est régulier), et tout type régulier qui est orthogonal au type générique est non-orthogonal à un type fortement minimal et localement fini (qui a une prégéométrie triviale).

collapse : Amalgamer dans une classe restreinte, en bornant de manière uniforme le nombre de réalisations de tous les ensembles fortement minimaux localement finis dans T_ω, pour obtenir une théorie fortement minimale.

Depuis, ces constructions ont été amplement utilisées par de nombreux chercheurs en théories des modèles ; la méthode représente un outil universel pour construire des exemples de structures exotiques et inattendues [Hr88, Ba94, Ba96, Po99, BH00, Po01]. En particulier, en fusionnant deux corps algébriquement clos, on peut construire une structure $(M, +_1, \cdot_1, +_2, \cdot_2)$ dont la théorie est fortement minimale et telle que les structures sous-jacentes $(M, +_i, \cdot_i)$, $i = 1, 2$, soient des corps algébriquement clos (de caractéristique différente, si l'on veut).

Une question se pose alors naturellement : peut-on construire une telle structure $(M, +_1, \cdot_1, +_2, \cdot_2)$ où l'on impose maintenant que les opérations d'addition $+_1$ et $+_2$ soient les mêmes (et que cela soit la seule véritable interaction) ? Plus généralement, construire une fusion fortement minimale de deux théories T_1 et T_2 au-dessus d'une troisième T_0 contenue dans T_1 et T_2 (le contexte relatif de la fusion, si l'on veut). C'est ce problème qui est au coeur de la présente thèse. L'étude est motivée par une remarque dans [Hr92] stipulant qu'une telle *fusion au-dessus d'un sous-langage* devrait être possible si T_0 est égale à la théorie d'un espace vectoriel infini sur un corps fini. Nous donnons maintenant deux exemples simples pour illustrer le phénomène d'une fusion au-dessus d'un sous-langage.

Soient d'abord $G_0 \leq G_1, G_2$ des groupes et X_i un ensemble infini sur lequel G_i agit librement. Si l'on considère X_i dans le langage $\mathcal{L}_i$ où tout élément de G_i correspond à un symbole de fonction, alors $T_i := \mathrm{Th}_{\mathcal{L}_i}(X_i)$ est fortement minimale et T_0 est un réduit commun de T_1 et T_2. Si $G := G_1 *_{G_0} G_2$ est le produit amalgamé de G_1 et G_2 au-dessus de G_0, alors la théorie d'une G-opération libre infinie fournit une fusion fortement minimale de T_1 et T_2 au-dessus de T_0.

Un peu moins trivial est l'exemple suivant : pour un corps gauche F on note EV_F la théorie d'un espace vectoriel infini sur F. Soient $T_i = \mathrm{EV}_{F_i}$ pour des corps gauches $F_0 \subseteq F_1, F_2$. On peut considérer $R := F_1 *_{F_0} F_2$, le coproduit de F_1 et F_2 au-dessus de F_0 en tant qu'anneaux non-commutatifs. Par un des résultats fondamentaux sur les corps gauches, R admet un corps des fractions F. Donc, EV_F est une fusion fortement minimale (naturelle) de T_1 et T_2 au-dessus de T_0.

Par contre, il y a des exemples concrets où pour des théories fortement minimales T_1, T_2 ayant un réduit commun T_0, aucune complétion de $T_1 \cup T_2$ n'est fortement minimale (cf. 3.0.1 et 3.4.10). C'est à l'aide de ces non-exemples que nous trouvons les hypothèses appropriées.

Les résultats que nous avons obtenus concernant la fusion au-dessus d'un sous-langage sont tout à fait satisfaisants en ce qui concerne la première étape de la construction (la "fusion libre"). Nous généralisons considérablement le contexte de la fusion libre, et nous faisons une étude détaillée des théories issues de cette première étape. En effet, nous obtenons le théorème suivant (il rassemble le Théorème 3.1.9 et d'autres résultats de la Section 3.1) :

Théorème I. *Soient T_1 et T_2 des théories fortement minimales telles que $T_0 = T_1 \cap T_2$ soit modulaire et ω-catégorique (plus une hypothèse technique qui est trivialement satisfaite si $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$). Alors, on peut fusionner librement T_1 et T_2 au-dessus de T_0 en une théorie ω-stable T_ω.*

Dans T_ω, il y a un unique 1-type générique $\mathfrak{g}$ qui est régulier (de rang ω en général), et si p est un type régulier orthogonal à $\mathfrak{g}$, alors p est non-orthogonal à un type fortement minimal et localement fini.

Nous observons qu'à ce stade, nous avons déjà construit un objet modèle-théorique sur lequel vit une fusion des prégéométries induites par acl_1 et acl_2 au-dessus de celle induite par acl_0 : la prégéométrie de déviation sur le type générique $\mathfrak{g}$.

Si l'hypothèse technique mentionnée dans le Théorème I n'est pas satisfaite, nous pouvons quand même construire la fusion libre : ses complétions seront alors supersimples. En généralisant les hypothèses, nous montrons le résultat suivant (cf. les Théorèmes 2.3.14 et 2.4.10, ainsi que des résultats autour).

Théorème II. *Soient T_1 et T_2 des théories supersimples de rang* SU *égal à 1 telles que $T_0 = T_1 \cap T_2$ soit fortement miminale, modulaire et ω-catégorique. Alors, on peut fusionner librement T_1 et T_2 au-dessus de T_0 en une théorie T_ω, et il y a une description explicite des complétions de T_ω et des types.*

Sous une hypothèse supplémentaire (satisfaite si T_1 et T_2 sont stables ou si T_0 a une prégéométrie triviale), toute complétion de T_ω est supersimple de rang SU *au plus ω, avec une relation de non-déviation bien naturelle. De plus tous les types* parasites *(ce sont les types orthogonaux aux types génériques) sont monobasés.*

Cependant, nos résultats restent partiels, en ce qui concerne la deuxième étape de la fusion, car nous ne savions pas effectuer le "collapse" en toute généralité. Mais nous montrons le collapse dans le cas où T_1 et T_2 sont monobasées. Modulo le résultat de collapse dans le contexte originel de fusion [Hr92], ce résultat suit du théorème suivant (cf. le Théorème 3.4.7) :

Théorème III (Collapse dans le contexte de fusion abélien)**.** *Soient T_1 et T_2 des théories fortement minimales et monobasées, et soit $T_0 = T_1 \cap T_2$ la théorie d'un groupe ω-catégorique. Alors, il existe une fusion fortement minimale T de T_1 et T_2 au-dessus de T_0 (obtenue en collapsant la théorie de la fusion libre T_ω). De plus, T est monobasée et complète.*

Ce résultat est vrai sans restriction sur la cardinalité des langages $\mathcal{L}(T_i)$.

Entre temps (fin 2005), Baudisch, Martin-Pizarro et Ziegler ont montré le collapse dans le cas où $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$ [BMZ05a]. À l'aide d'un principe général de réduction, nous en déduisons le collapse en toute généralité :

Théorème IV (cf. le Théorème 3.5.7)**.** *Soient T_1 et T_2 fortement minimales, et soit $T_0 = T_1 \cap T_2$ ω-catégorique. On suppose que les théories T_1 et T_2 ont la DMP (plus l'hypothèse technique présente dans le Théorème I).*

Alors il existe une fusion fortement minimale T de T_1 et T_2 au-dessus de T_0 (obtenue en collapsant la théorie de la fusion libre T_ω).

Après ce petit extrait de résultats, dans ce qui suit, je vais donner une description détaillée (et plus technique) des résultats principaux de la thèse, en suivant essentiellement l'ordre des chapitres. Les hypothèses de travail sont les suivantes : nous avons deux théories complètes T_1 et T_2, dans des langages dénombrables $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ respectivement, et telles que $T_0 := T_1 \cap T_2$ (dans le langage $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$) soit fortement minimale, ω-catégorique et modulaire. Nous supposons que les théories T_i éliminent les quanteurs dans les langages $\mathcal{L}_i$ respectifs.

Nous dénoterons par T_ω la fusion libre de T_1 et T_2 au-dessus de T_0 (dans le langage $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$).

Dans un premier temps (dans le Chapitre 2), nous supposons que T_1 et T_2 soient simples de rang SU égal à 1. Alors nous pouvons fusionner librement T_1 et T_2 au-dessus de T_0 à l'aide de la prédimension (usuelle) $\delta = \mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2 - \mathrm{d}_0$, où d_i dénote le rang SU au sens de T_i. Nous considérons la classe élémentaire $\tilde{\mathcal{C}}_0$ des $\mathcal{L}$-structures qui sont modèles de $T_1^\forall \cup T_2^\forall$ et algébriquement clos pour T_1 et T_2 avec prédimension héréditairement non-négative, la notion $\leq$ de plongement fort étant donnée par δ. La classe $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$ a la propriété d'amalgamation, mais en général, elle n'a pas la propriété du plongement commun (c'est à dire elle n'est pas *connexe*). Puis, la classe $\mathcal{C}_0$ des structures "finiment engendrées" (dans un sens à préciser) dans $\tilde{\mathcal{C}}$ n'est pas dénombrable en général. Néanmoins, on peut considérer les structures dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ qui sont *riches*, au sens de Fraïssé, pour une composante connexe de $(\mathcal{C}_0, \leq)$. Ainsi, deux structures riches n'ont pas forcément la même $\mathcal{L}$-théorie, et T_ω, la théorie de toutes les structures riches, n'est pas complète.

Après avoir établi les outils de base pour le travail dans la classe $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$, nous considérons, dans la Section 2.3, des questions d'uniformité et de définissabilité. Cela nous mène à une axiomatisation de T_ω. Nous montrons ensuite, à l'aide de cette axiomatisation, que tout modèle suffisamment saturé de T_ω est riche. Comme corollaire, nous obtenons une description des complétions et des types dans T_ω (Théorème II).

Dans la Section 2.5, nous étudions la catégorie des paires $A \leq B$ de structures dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$, et nous vérifions que toute complétion de T_ω a la propriété wnfcp (propriété faible du non-recouvrement fini) introduite par Ben-Yaacov, Pillay et Vassiliev dans [BPV03], en passant par la théorie des paires magnifiques de modèles d'une théorie simple.

Initialement, nous avons uniquement considéré le cas où T_1 et T_2 sont fortement minimales. Or, même dans ce cas, il y a des exemples où toute complétion de T_ω est instable. En fait, nous donnons même un exemple où aucune complétion de $T_1 \cup T_2$ n'est stable (Exemple 3.0.1(2)). Au vu de ces exemples, il semblait plus naturel de commencer avec des théories potentiellement instables au départ. Si nous supposons que T_1 et T_2 sont fortement minimales, nous obtenons (dans la Section 2.6) des résultats de n-amalgamation divers :

Théorème V (cf. les Théorèmes 2.6.7 et 2.6.8)**.** *Si T_1 et T_2 sont fortement minimales, toute complétion de T_ω a la propriété de n-amalgamation de modèles et une version réelle de la propriété de n-amalgamation, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Si les théories T_i sont fortement minimales, et si de plus dans l'une des expansions $T_0 \subseteq T_i$ les multiplicités ne changent pas — c'est le cas si $\mathrm{acl}_0 = \mathrm{dcl}_0$, par exemple si T_0 est la théorie d'un espace vectoriel sur un corps fini — la classe $(\mathcal{C}_0, \leq)$ est dénombrable et connexe, et il y a une structure riche et dénombrable unique, c'est à dire une limite de Fraïssé. Sous ces hypothèses, le type d'isomorphime d'une structure $k \in \mathcal{C}_0$ ne dépend que du type (dans T_1 et T_2) d'un ensemble de "générateurs" fini et fort dans k (nous appelons ce phénomène *bon contrôle* et nous supposons un bon contrôle dans tout ce qui suit). La théorie T_ω est alors complète. Nous montrons dans la Section 3.1 qu'elle est ω-stable de rang de Morley au plus ω, avec un unique type générique régulier (c'est le Théorème I dont l'hypothèse technique est précisément le bon contrôle). [1] Par une analyse fine de la géométrie relative des expansions, nous arrivons à effectuer des calculs de rangs exacts, et nous montrons (cf. 3.1.17) :

Dichotomie du rang : Si $\mathfrak{g}$ dénote le type générique (en excluant des cas inintéressants), alors ou bien $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = 1$ et $\mathrm{RM}(\mathfrak{g}) = 2$ (si T_1 et T_2 sont triviales), ou bien $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{RM}(\mathfrak{g}) = \omega$ (dans tous les autres cas).

Dans la Section 3.2, nous étudions les classes de non-orthogonalité de types réguliers dans T_ω, et nous montrons que tout type régulier qui est orthogonal au type générique est fortement minimal et localement fini, et que toute classe de non-orthogonalité a un représentant réel.

Pour un choix de types fortement minimaux et localement finis (les *types admissibles*), la non-orthogonalité prend une jolie forme. Cela nous suffit pour montrer des résultats de coordinatisation explicites pour les types de rang fini (plus exactement pour les types orthogonaux à $\mathfrak{g}$). Si de plus T_1 et T_2 ont la DMP, nous obtenons le résultat de coordinatisation uniforme suivant :

Théorème VI (cf. le Théorème 3.2.13)**.**
Il existe une suite $(\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{z}_i), \theta_i(\overline{z}_i))_{i\in\mathbb{N}}$, où φ_i et θ_i sont des $\mathcal{L}_1\cup\mathcal{L}_2$-formules sans paramètres, avec les propriétés suivantes :

(I) Pour tout i et tout $\overline{b} \models \theta_i(\overline{z}_i)$, la formule $\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b})$ est fortement minimale et localement finie.

*(II) (*Uniformité du type de géométrie*) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, si $\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b})$ a une prégéométrie triviale pour un $\overline{b} \models \theta_i(\overline{z}_i)$, alors $\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b}')$ a une prégéométrie triviale pour tout $\overline{b}' \models \theta_i(\overline{z}_i)$.*

*(III) (*Définissabilité de l'orthogonalité*) Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ il existe une $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$-formule $\chi(\overline{z}_i, \overline{z}_j)$ telle que pour tout $\overline{b}, \overline{b}'$ avec $\models \theta_i(\overline{b}) \wedge \theta_j(\overline{b}')$ on ait $\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b}) \not\perp \varphi_j(\overline{x}_j, \overline{b}')$ si et seulement si $\models \chi(\overline{b}, \overline{b}')$.*

*(IV) (*Coordinatisation*) Si $\overline{a}, B \subseteq M \models T_\omega$ sont tels que $p := \mathrm{tp}(\overline{a}/B)$ soit orthogonal à $\mathfrak{g}$, alors p admet une coordinatisation en (les types génériques) des instances $\varphi_j(\overline{x}, \overline{b})$.*

Notons que ce sont précisément les types parasites pour lesquels il faut borner le nombre de réalisations afin de construire un collapse fortement minimal, donc par ce résultat de coordinatisation, il suffit de borner le nombre de réalisations des (types génériques) des formules coordinatisantes. Leurs génériques sont d'ailleurs tous admissibles.

Dans le contexte originel de fusion (au-dessus de $\mathcal{L}_0 = \{=\}$), si p et q sont des types admissibles non-orthogonaux, alors p et q sont conjugués par une permutation. De plus, tout type admissible étant trivial dans ce cas, l'orthogonalité est équivalente à la presque orthogonalité. Par contre, si T_0 n'est pas triviale, disons égale à $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$, il faut remplacer les permutations par le groupe des transformations affine-linéaires et il y a donc des paramètres à considérer. De plus,

[1] Des parties importantes du Chapitre 3 ont été développées indépendamment par Assaf Hasson, et le contenu de ce chapitre fait l'objet d'une publication commune [HH06].

il y a des types admissibles localement modulaires non-triviaux, et la présence de type localement modulaires non-modulaires entraîne qu'il existe des types admissibles non-orthogonaux mais presque orthogonaux.

Le résultat de coordinatisation mentionné (ou plutôt une légère variante) est à l'origine d'une stratégie du collapse dans le cas où T_0 est non-triviale, dans la mesure où il rend possible un traitement de la "région parasite" qui localement ressemble complètement aux théories étudiées dans [CHL85]. Ainsi, nous étudions des *enveloppes affines* dans T_ω, car cela nous permet de gérer les types admissibles localement modulaires non-modulaires. Dans la Section 3.3, nous donnons quelques généralités sur les enveloppes affines dans une théorie stable quelconque, et nous montrons ensuite que dans le cas de la fusion libre T_ω, la classe des structures dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ qui sont égales à leur enveloppe affine est une classe élémentaire.

Cette technique nous permet de résoudre le problème du collapse dans le contexte très particulier où T_1, T_2 et T_0 sont des théories de structures abéliennes (de façon équivalente : T_i est la théorie d'un groupe monobasé pour tout i) et où T_ω est alors une théorie dimensionnelle, en obtenant le Théorème III. Ce résultat généralise l'exemple de "fusion naturelle" de théories d'espaces vectoriels sur des corps gauches F_i donné tout au début, si le petit corps F_0 est fini. Au-dessus d'un corps fini, l'existence d'un collapse est donc un phénomène "robuste", dans le sens où l'on peut ajouter des paramètres ou des sous-groupes définissables aux langages sans perdre la possibilité d'une fusion fortement minimale. Par contre, si $T_0 = \mathrm{EV}_{F_0}$ pour un corps F_0 infini, ce n'est plus le cas (voir l'Exemple 3.4.10).

Dans la Section 3.5, nous établissons un principe général pour réduire le collapse au collapse dans des situations bien particulières. En utilisant cette réduction, nous montrons le collapse pour le cas de deux théories T_1 et T_2 qui sont monobasées avec la DMP (toujours sous l'hypothèse du bon contrôle) ainsi que dans le cas où T_0 est une théorie triviale et T_1 et T_2 ont la DMP. Une autre application du principe de réduction nous permet de déduire le collapse en toute généralité (Théorème IV) du résultat de collapse au-dessus de $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$ montré par Baudisch, Martin-Pizarro et Ziegler [BMZ05a].

En profitant du point de vue assez général adopté dans la fusion, nous présentons dans le Chapitre 4 deux variations sur le thème de la fusion. La prédimension change, mais nous restons techniquement très proche de la fusion (qui est plus compliquée que les variantes présentées).

Ainsi, dans la Section 4.1, nous construisons la théorie de la *courbe générique* plane au-dessus d'une théorie T complète supersimple de rang SU égal à 1, en généralisant la construction de la courbe générique au-dessus de la théorie d'un corps algébriquement clos effectuée dans [CHKP02] (cette courbe générique plane dans un corps algébriquement clos a une interprétation naturelle, comme limite des courbes planes algébriques génériques de degré d quand d tend vers l'infini). Nous obtenons le résultat suivant (cf. le Théorème 4.1.11) :

Théorème VII. *La théorie T_ω de la courbe plane générique au-dessus de T est complète et supersimple de rang* SU *au plus ω.*

Si T est fortement minimale, alors T_ω est ω-stable de rang de Morley $\leq \omega$.

Afin de construire un contre-exemple à la conjecture de Berline-Lascar, Poizat considère des corps algébriquement clos K avec un nouveau prédicat unaire P, désignant un sous-ensemble distinct $P^K \subseteq K$. Il effectue une amalgamation à la Hrushovski, à l'aide de la prédimension $\delta(A) := 2\deg.\mathrm{tr}(A) - \dim(P^A)$, où dim est une notion de dimension appropriée sur le prédicat, et il obtient des corps de rang de Morley $\omega \cdot 2$ (le rang du prédicat est égal à ω).

Dans [Po99], on a $P = N$ (l'ensemble des points noirs), et le prédicat désigne juste un sous-ensemble : on obtient les *corps noirs*. Si $P = R$ désigne un sous-groupe du groupe additif du corps, on construit ainsi les *corps rouges* [Po01]. Enfin, également dans [Po01], Poizat considère le cas où $P = V$ désigne un sous-groupe du groupe multiplicatif du corps, pour obtenir les *corps verts*.

Il y a un cadre naturel qui incorpore deux de ces constructions de *corps bicolores* : les corps noirs (en toute caractéristique) et les corps rouges en caractéristique positive. Nous proposons le cadre des *structures bicolores*, et nos hypothèses de travail sont les suivantes : T_1 est complète et supersimple de rang SU égal à 1, et $T_0 \subseteq T_1$ est un réduit que nous supposons fortement minimal, modulaire et ω-catégorique. En ajoutant un nouveau prédicat unaire R à $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(T_1)$, nous considérons la classe des modèles de $T_1^\forall$ dans $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \{R\}$, à l'aide de la prédimension $\delta(A) := 2\,\mathrm{d}_1(A) - \mathrm{d}_0(R^A)$, où d_i désigne le rang SU par rapport à T_i.

Dans 4.2.1, nous développons la machinerie des amalgames de Hrushovski comme dans la fusion libre : la classe $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$ en question a la propriété d'amalgamation, et cette fois elle est aussi connexe. Nous axiomatisons la théorie des structures bicolores riches T_ω, et nous montrons ensuite que les modèles suffisamment saturés de T_ω sont également riches. Nous obtenons alors une description des types dans T_ω. Par construction, les modèles de T_ω sont de la forme (M, R^M), où M est un modèle de T_1 et $R^M \preccurlyeq_{\mathcal{L}_0} M$ une sous-structure élémentaire (propre) au sens de $\mathcal{L}_0$. Nous montrons :

Théorème VIII (cf. le Théorème 4.2.15)**.** *La théorie T_ω est supersimple de rang* SU *au plus $\omega \cdot 2$, et* $\mathrm{SU}(R) \leq \omega$.

Si par exemple T_1 est la théorie d'un corps pseudofini de caractéristique $p > 0$ et $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_p}$, le rang sera exactement $\omega \cdot 2$. Ainsi, nous généralisons, de manière satisfaisante, la construction de structures bicolores (non-collapsées) aux théories supersimples de rang SU égal à 1.

À partir de la Section 4.2.2, nous supposons que T_1 est fortement minimale. Sans hypothèse supplémentaire, la théorie des structures bicolores riches T_ω est alors ω-stable de rang de Morley au plus $\omega \cdot 2$. Comme dans le cas de la fusion, la question de l'existence d'un collapse de T_ω dans une théorie de rang de Morley fini (en l'occurrence 2) se pose. Dans [Po99], Poizat a construit des corps noirs collapsés. Ensuite, Baldwin et Holland [BH00] ont montré que certains d'entre eux sont saturés, en axiomatisant leur théorie, ce qui montre que ce sont des structures de rang de Morley 2. Par contre, l'existence d'un collapse des corps rouges (en caractéristique positive) est restée ouverte. Techniquement, on rencontre les mêmes problèmes que dans la fusion au-dessus d'un espace vectoriel (sur un corps fini), en particulier la présence d'espaces affines fortement minimaux et localement finis.

Nous montrons dans 4.2.2 que si T_1 a la DMP, la "région" que l'on aimerait rendre algébrique (l'ensemble des types *parasites*) admet une coordinatisation en famille d'ensembles fortement minimaux localement finis dans l'esprit du Théorème VI. Dans 4.2.3, en utilisant les résultats sur les enveloppes affines, nous montrons le collapse dans le cas particulier où T_1 et T_0 sont des théories de structures abéliennes (Théorème 4.2.36). Nous obtenons une théorie presque fortement minimale de rang de Morley 2 (où R définit un ensemble fortement minimal).

Comme dans la fusion libre, nous donnons une réduction du problème général du collapse à deux cas particuliers : T_0 est la théorie d'un ensemble infini sans structure, ou T_0 est (essentiellement) la théorie d'un espace vectoriel infini sur un corps fini. Enfin, nous utilisons cette réduction pour déduire le collapse en toute généralité du collapse des corps rouges qui était obtenu tout récemment par Baudisch, Martin-Pizarro et Ziegler [BMZ05b]. Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème IX (cf. le Théorème 4.2.45)**.** *Soit T_1 une théorie fortement minimale ayant la DMP, et soit $T_0 \subseteq T_1$ un réduit ω-catégorique. Supposons T_1 non-triviale. Alors, il existe une structure bicolore (M, R^M) avec $M \models T_1$ et $R^M \preccurlyeq_{\mathcal{L}_0} M$ telle que (M, R^M) soit presque fortement minimale, avec un unique type générique de rang 2 et telle que R^M soit fortement minimal. Cette structure est obtenue par un collapse.*

Finalement, dans le Chapitre 5, nous établissons l'axiomatisabilité de l'*automorphisme générique* dans plusieurs théories qui sont issues de la méthode d'amalgamation de Hrushovski sans collapse (pour les versions collapsées, le résultat suit des critères connus). Si T est une $\mathcal{L}$-théorie stable et modèle-complète, on peut former la théorie T_σ (dans le langage $\mathcal{L} \cup \{\sigma\}$) dont les modèles sont précisément les paires (M, σ), où M est un modèle de T et $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(M)$. Si T_σ a une modèle-compagne, on la note TA et on dit que *l'automorphisme générique est axiomatisable*, ou encore que *TA existe*.

D'abord, dans la Section 5.1, nous présentons un critère simple suffisant pour l'existence de TA. Ce critère est formulé en terme d'une notion de généricité qui est particulièrement bien adaptée aux théories totalement transcendantes de rang infini avec une notion inhérente naturelle de généricité qui n'est pas forcément celle fournie par le rang de Morley. Le critère uniformise plusieurs preuves d'existence de TA, entre autres celle pour le cas où $T = DCF_0$ est la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique 0, donnée dans [Bu06].

Puis, dans la Section 5.2, nous appliquons le critère à de divers théories issues d'une amalgamation à la Hrushovski et nous obtenons :

Théorème X (cf. le Théorème 5.2.1)**.** *Supposons que T_1 et T_2 soient fortement minimales avec la DMP. L'automorphisme générique est alors axiomatisable pour les théories suivantes :*

(A) L'exemple "ab initio" de Hrushovski avant collapse [Hr93].

(B) La théorie T_ω de la fusion libre de T_1 et T_2 au-dessus de T_0 (sous l'hypothèse du bon contrôle).

(C) La théorie T_ω issue du contexte bicolore $T_1 \supseteq T_0$, (en particulier la théorie des corps noirs non-collapsés en toute caractéristique ainsi que la théorie des corps rouges non-collapsés en caractéristique positive).

(D) La théorie d'une courbe plane générique au-dessus de la théorie T_1.

(E) La théorie des corps verts non-collapsés en caractéristique 0.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rassemblons des résultats qui nous seront utiles dans l'ensemble de la thèse. Il sert également pour fixer la terminologie ainsi que des notations. Dans ces préliminaires, nous ne disons rien sur la stabilité en général, et nous allons utiliser librement des résultats sur les théories stables. Notre référence principale pour la stabilité est le livre de Pillay [Pi96] ; la référence classique est bien sûr [Sh90].

Voilà quelques mots sur la notation. Nous utilisons des notations plutôt standard (en suivant largement [Pi96]). Nous écrivons AB pour $A \cup B$, et $A \subseteq_\omega B$ signifie que A est un sous-ensemble fini de B. En général, nous ne distinguons pas la structure $\mathfrak{M}$ et l'ensemble de base sous-jacent M et écrivons donc M pour les deux. Par un *modèle monstre* d'une théorie complète T, nous entendons un modèle $\mathfrak{C} \models T$ qui est κ-saturé et fortement κ-homogène pour un cardinal régulier κ très grand. Quand nous utilisons un tel modèle monstre, tous les modèles considérés seront des sous-structures élémentaires de $\mathfrak{C}$ et *petits* (i.e. de cardinalité $< \kappa$), c'est à dire $\mathfrak{C}$ sert comme *domaine universel* pour T. Tout sous-ensemble de $\mathfrak{C}$ que nous considérons sera également petit dans ce sens.

1.1 Théories simples

Dans cette section, nous donnons quelques généralités sur les théories simples. Cette classe de théorie a été introduite par Shelah dans [Sh80], puis développée par Kim [Ki98] et Kim-Pillay [KP97]. À part le graphe aléatoire, les premiers exemples naturels sont les corps pseudo-finis et les corps algébriquement clos avec automorphisme générique (voir [Hr02] et [CH99]).

Nous remarquons que des expansions génériques (prédicat générique, automorphisme générique) étudiées par Chatzidakis-Pillay [CP98] sont des sources de nouvelles théories simples et en général instables. Pour une introduction aux théories simples on peut consulter le livre de Wagner [Wa00].

Soit Φ un ensemble de formules en $\overline{x}$. On dit que Φ est *k-inconsistant* ($k \in \mathbb{N}$) si pour tout sous-ensemble $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ayant k éléments, la conjonction $\bigwedge_{\varphi \in \Phi_0} \varphi(\overline{x})$

est inconsistante.

Les définitions suivantes sont dues à Shelah :

Définition 1.1.1. 1. Une formule $\varphi(\overline{x},\overline{a})$ *se k-divise sur A* ($k \in \mathbb{N}$) s'il existe une suite $(\overline{a}_i)_{i\in\omega}$ tels que $\mathrm{tp}(\overline{a}_i/A) = \mathrm{tp}(\overline{a}/A)$ pour tout i et $\{\varphi(\overline{x},\overline{a}_i) \mid i \in \omega\}$ est k-inconsistant. On dit que la formule $\varphi(\overline{x},\overline{a})$ *se divise sur A* si elle se k-divise sur A pour un $k \in \mathbb{N}$.

2. Soit $\pi(\overline{x})$ un type partiel et A un ensemble de paramètres. On dit que $\pi(\overline{x})$ *dévie au-dessus de A* s'il existe des formules $\varphi_0(\overline{x},\overline{a}^0),\ldots,\varphi_m(\overline{x},\overline{a}^m)$ telles que $\pi \vdash \bigvee_{i=0}^m \varphi_i(\overline{x},\overline{a}^i)$ et $\varphi_i(\overline{x},\overline{a}^i)$ se divise sur A pour $i = 0,\ldots,m$. Si $\mathrm{tp}(\overline{a}/BA)$ ne dévie pas au-dessus de A, on écrit $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$.

3. Une théorie T complète est *simple* si pour tout ensemble de paramètres B et tout uplet (fini) $\overline{a}$ il existe $A \subseteq B$ avec $|A| \leq |T|$ et $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$. Si l'ensemble A en question peut toujours être choisi fini, on dit que T est *supersimple*.

Toute théorie stable est simple, et une théorie stable est supersimple si et seulement si elle est superstable. Comme dans les théories stables, la relation de non-déviation $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$ a de jolies propriétés dans toute théorie simple. Notamment, elle fournit une notion d'indépendance dans le sens de la Définition 1.1.2, satisfaisant au théorème d'indépendance au-dessus d'un modèle.

Définition 1.1.2. Soit T une théorie complète et $\mathfrak{C}$ un modèle monstre de T. Puis, soit Γ une collection de triplets $(\overline{a},B,A)$ dans $\mathfrak{C}$. Si $(\overline{a},B,A) \in \Gamma$, on écrit $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_A B$. On dit que Γ est une *notion d'indépendance* si les propriétés suivantes (i)-(vii) sont satisfaites :

(i) (*invariance*) Γ est invariante par automorphismes de $\mathfrak{C}$.

(ii) (*non-trivialité*) Pour tout $\overline{a}, B$, $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_B \overline{a}$ si et seulement si $\overline{a} \in \mathrm{acl}(B)$.

(iii) (*caractère local*) Pour tout $\overline{a}$ et B il existe un sous-ensemble $A \subseteq B$ avec $|A| \leq |T|$ tel que $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_A B$.

(iv) (*caractère fini*) $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_A B$ si et seulement si $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_A \overline{b}$ pour tout $\overline{b} \in B$ fini.

(v) (*extension*) Pour tout $\overline{a}, A$ et B il existe $\overline{a}'$ avec $\mathrm{tp}(\overline{a}'/A) = \mathrm{tp}(\overline{a}/A)$ tel que $\overline{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_A B$.

(vi) (*symétrie*) Pour tout $\overline{a}, \overline{b}$ et tout A on a $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_A \overline{b}$ ssi $\overline{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_A \overline{a}$.

(vii) (*transitivité*) Pour tout $\overline{a}, A, B, C$ on a $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_A BC \iff \overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_A B$ et $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_{AB} C$.

Si Γ est une notion d'indépendance, on notera $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_A B$ si pour tout $\overline{c} \in C$ fini on a $\overline{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_A B$.

On dit que Γ satisfait au *théorème d'indépendance au-dessus d'un modèle* si de plus, on a

(viii) Pour tout modèle $M \preccurlyeq \mathfrak{C}$, $M \subseteq B_1, B_2$ et $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ tels que $\mathrm{tp}(\overline{a}_1/M) = \mathrm{tp}(\overline{a}_2/M)$, $\overline{a}_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_M B_i$ pour $i = 1,2$ et $B_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_M B_2$, il existe un uplet $\overline{a}$ avec $\mathrm{tp}(\overline{a}/B_i) = \mathrm{tp}(\overline{a}_i/B_i)$ (pour $i = 1,2$) et $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\Gamma}_M B_1 B_2$.

Le théorème suivant fournit une caractérisation abstraite de l'indépendance dans une théorie simple, et il s'avère extrêmement utile dans les applications. Il est souvent préférable de montrer la simplicité d'une théorie donnée en dévinant une notion d'indépendance Γ et en passant par ce théorème.

Théorème 1.1.3 (Théorème de Kim-Pillay [KP97]). *Soit T une théorie complète. Alors, T est simple si et seulement si T admet une notion d'indépendance Γ satisfaisant au théorème d'indépendance au-dessus d'un modèle.*

De plus, si Γ est une telle notion d'indépendance, on a $\downarrow = \downarrow^{\Gamma}$, où $\downarrow$ dénote la relation de non-déviation dans T.

On remarque que techniquement, le théorème d'indépendance remplace la propriété de *stationarité* (un type p au-dessus d'un modèle M a une seule extension non-déviante à tout ensemble $A \supseteq M$), vraie dans toute théorie stable. En bref, on a l'égalité "simplicité + stationarité = stabilité". Il existe d'ailleurs une version stable du Théorème de Kim-Pillay (voir par exemple [Ba88, VII.1]). Il suffit de remplacer (viii) par l'axiome de stationarité.

Le rang U de Lascar a son analogue en simplicité. Pour le définir, notons $\mathrm{On}^+ := \mathrm{On} \cup \{\infty\}$, où $\alpha < \infty$ pour tout ordinal $\alpha \in \mathrm{On}$, et où l'addition ordinale est étendue à On^+ par $\infty + \alpha = \alpha + \infty = \infty + \infty = \infty$ (pour tout α).

Définition 1.1.4. Soit T une théorie simple et $\mathfrak{C} \models T$ un modèle monstre. On considère tous les types $p \in S(B)$ pour tous les $B \subseteq \mathfrak{C}$. Le *rang* SU *(de Lascar)* est donné par la plus petite fonction allant de tous ces types dans On^+ satisfaisant, pour tout $\alpha \in \mathrm{On}$:

$\mathrm{SU}(p) \geq \alpha + 1$ s'il existe une extension déviante q de p avec $\mathrm{SU}(q) \geq \alpha$.

On note que $\mathrm{SU}(p) = 0$ si et seulement si p est algébrique. Une théorie simple est supersimple si et seulement si $\mathrm{SU}(p) < \infty$ pour tout type réel p.

On rappelle la somme commutative $\oplus$ définie sur les ordinaux. C'est la plus petite fonction symétrique et croissante f des paires d'ordinaux dans les ordinaux qui satisfait $f(\alpha + 1, \beta) = f(\alpha, \beta) + 1$. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ on a $\alpha + \beta \leq \alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha \in \mathrm{On}$, et si $\alpha, \beta < \omega$, alors $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta$ est égal à la somme habituelle.

Les inégalités de Lascar pour SU dans une théorie simple se montrent comme dans le cas stable (voir [Wa00, Ch.5] pour une preuve dans le cas simple) :

Fait 1.1.5 (Inégalités de Lascar). *Pour tout $\overline{a}, \overline{b}$ et A on a*

$$\mathrm{SU}(\overline{a}/\overline{b}A) + \mathrm{SU}(\overline{b}/A) \leq \mathrm{SU}(\overline{a}\overline{b}/A) \leq \mathrm{SU}(\overline{a}/\overline{b}A) \oplus \mathrm{SU}(\overline{b}/A).$$

Il y a aussi des rangs locaux que l'on peut considérer :

Définition 1.1.6. Soit T une $\mathcal{L}$-théorie complète.

(1) Pour $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$ une $\mathcal{L}$-formule sans paramètres, le rang $\mathrm{D}(-, \varphi)$ est défini comme la plus petite fonction allant de la classe des types partiels en $\overline{x}$ dans On^+ satisfaisant, pour tout $\alpha \in \mathrm{On}$:

  – $D(\pi(\overline{x}), \varphi) \geq \alpha+1$ s'il existe $\overline{b}$ tel que $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ se divise sur les paramètres de π et $\mathrm{D}(\pi(\overline{x}) \wedge \varphi(\overline{x}, \overline{b}), \varphi) \geq \alpha$.

(2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$ sans paramètres on définit un rang $\mathrm{D}(-, \varphi, k)$ en remplaçant "se divise" par "se k-divise" dans (1).

(3) Une théorie simple a la wnfcp *(weak non finite cover property*, une version faible de la propriété du non-recouvrement fini) si pour toutes formules $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$ et $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ on a :
(finitude) $\mathrm{D}(\psi(\overline{x}, \overline{c}), \varphi) < \omega$ pour tout $\bar{c}$.
(définissabilité) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une formule $\chi_n(\overline{y})$ telle que $\mathrm{D}(\psi(\overline{x}, \overline{b}), \varphi) = n$ si et seulement si $\models \chi_n(\overline{b})$.

Une théorie est simple si et seulement si $\mathrm{D}(\overline{x} = \overline{x}, \varphi, k) < \infty$ (c'est équivalent à $\mathrm{D}(\overline{x} = \overline{x}, \varphi, k) < \omega$) pour tout $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$ et k. Par contre, il y a des exemples de théories simples (même supersimples) avec des rangs $\mathrm{D}(\overline{x} = \overline{x}, \varphi) \geq \omega$ et même égal à ∞. Une théorie (simple) est appelée *basse* si $\mathrm{D}(\overline{x} = \overline{x}, \varphi) < \omega$ pour tout φ. Si T a la wnfcp, elle est donc basse.

Une théorie T *élimine le quanteur* $\exists^\infty$ si pour toute formule $\varphi(x, \overline{z})$ il existe une formule $\theta(\overline{z})$ telle que $T \vdash \exists^\infty x \varphi(x, \overline{z}) \leftrightarrow \theta(\overline{z})$. C'est équivalent à l'existence d'un entier n_φ satisfaisant, dans tout $M \models T$: si pour $\overline{b} \in M$, la formule $\varphi(x, \overline{b})$ a plus de n_φ solutions dans M, alors $\varphi(x, \overline{b})$ a une infinité de solutions dans M.

Pour une formule $\varphi(\overline{x})$ dans une théorie simple, on définit $\mathrm{SU}(\varphi(\overline{x}))$ comme le supremum des $\mathrm{SU}(p)$, où p est un type complet contenant $\varphi(\overline{x})$. Une théorie simple T est donc de rang SU égal à 1 si $\mathrm{SU}(p) = 1$ pour tout 1-type p non-algébrique. Voici quelques exemples de théories simples de rang SU égal à 1 :

- T fortement minimale, ou plus généralement T stable et faiblement minimale (voir [Pi96] pour la définition) ;
- la théorie d'un corps pseudo-fini (c'est à dire d'un modèle infini de la théorie des corps finis) [Hr02] ;
- la théorie du graphe aléatoire, plus généralement, si T est simple de rang SU égal à 1 et T_P la théorie qu'on obtient en ajoutant un prédicat aléatoire à (une sorte de) T, alors toute complétion de T_P sera simple de rang SU égal à 1 [CP98].

Hrushovski a montré que toute théorie simple de rang SU égal à 1 élimine le quanteur $\exists^\infty$ [Hr98, Lemma 4.2].

Soit T une théorie simple de rang SU égal à 1. Pour une formule à une variable libre $\varphi(x)$ on a $\mathrm{SU}(\varphi(x)) = 1$ si et seulement si $\exists^\infty x \varphi(x)$. Par induction, utilisant les inégalités de Lascar, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathrm{SU}(\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})) = n \iff \models \exists^\infty x_0 \ldots \exists^\infty x_{n-1} \varphi(\overline{x}),$$

et plus généralement pour $r \in \mathbb{N}$ quelconque $\mathrm{SU}(\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \geq r$ si et seulement s'il existe un sous-ensemble $I \subseteq \mathbf{n}$ de cardinalité r tel que la projection de $\varphi(\overline{x})$ sur les coordonnées $\overline{x}_I$ (donnée par $\exists \overline{x}_{\mathbf{n} \setminus I} \varphi(\overline{x})$) soit de rang r. La première partie du fait suivant est une conséquence de la discussion précédente. Quant à la seconde partie, elle découle également de l'élimination de $\exists^\infty$ dans T.

Fait 1.1.7. *Soit T une théorie simple de rang* SU *égal à 1.*

1. *Le rang* SU *est définissable dans T, c'est à dire pour toute formule $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$ et tout entier r il existe $\theta(\overline{z})$ telle que $\mathrm{SU}(\varphi(\overline{x}, \overline{b})) = r$ si et seulement si $\models \theta(\overline{b})$.*
2. *T a la* wnfcp. □

Par la caractérsisation de $\mathrm{SU}(\varphi(\overline{x})) \geq r$ donnée ci-dessus, nous obtenons :

Remarque 1.1.8. *Soient $T' \subseteq T$ une expansion de théories simples de rang* SU *égal à 1 (dans des langages $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$) et $\varphi'(\overline{x})$ une $\mathcal{L}'$-formule. Alors, $\mathrm{SU}_{\mathcal{L}'}(\varphi') = \mathrm{SU}_{\mathcal{L}}(\varphi')$.*

Dans l'ensemble de la thèse les théories simples considérées seront toutes supersimples ou stables. Pour ne pas avoir à introduire les hyperimaginaires, nous énonçons donc les définitions suivantes (la Section 1.2 incluse) seulement dans le cas des théories supersimples ou stables.

Définition 1.1.9. Soit $\pi(\overline{x})$ un type partiel au-dessus de A, dans une théorie supersimple ou stable T. On dit que π est *monobasé* si pour tout uplet $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ de réalisations de π et pour tout $B \supseteq A$ on a $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid\;}_{\mathrm{acl}^{eq}(A\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n)\cap \mathrm{acl}^{eq}(B)} B$.

Donnons encore une définition (par *famille invariante* de types partiels, on entend une famille de types partiels close par automorphismes).

Définition 1.1.10. Soit Σ une famille invariante dans une théorie T supersimple ou stable, et soit $\pi(\overline{x})$ un type partiel au-dessus de A. Alors :

– π est Σ-*interne* (*presque* Σ-*interne*, respectivement), si pour tout $\overline{a} \models \pi$ il existe $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid\;}_A B$ et $\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n$ réalisant des types dans Σ basés sur B tels que $\overline{a} \in \mathrm{dcl}(B\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n)$ (ou $\overline{a} \in \mathrm{acl}(B\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n)$, respectivement).
– π est Σ-*analysable* ou *analysable par* Σ, si pour tout $\overline{a} \models \pi$ il existe une suite $(\overline{a}_i)_{i<\alpha}$ telle que $\overline{a} \in \mathrm{acl}(A, \overline{a}_i : i < \alpha)$ et $\mathrm{tp}(\overline{a}_i/A\overline{a}_j : j < i)$ est presque Σ-interne pour tout $i < \alpha$.

On remarque que ce serait équivalent d'exiger, dans la définition de la Σ-analysabilité, que $\overline{a}_i \in \mathrm{dcl}(A\overline{a})$ pour tout i et que $\mathrm{tp}(\overline{a}_i/A\overline{a}_j : j < i)$ soit Σ-interne pour tout $i < \alpha$ (voir [Wa00]). Le fait suivant montre que les types monobasés ont de bonnes propriétés de transfert :

Fait 1.1.11 ([Wa04]). *Soit π un type partiel qui est analysable par des types monobasés. Alors π est monobasé.*

1.2 Propriété de n-amalgamation

La propriété de n-amalgamation a ses origines dans les travaux de Shelah, et elle a été considérée dans un contexte instable par Hrushovski, en montrant que les corps pseudofinis ont cette propriété pour tout n.

Grosso modo, on a une famille de types, indexée par les sous-ensembles propres de $\mathbf{n} := \{0, 1, \dots n-1\}$, satisfaisant des conditions évidentes de compatibilités et certaines conditions additionnelles, et on veut montrer que la réunion de ces types est consistante. Le lien entre la propriété de n-amalgamation et la n-simplicité a été étudié par Kolesnikov [Ko03].

Définition 1.2.1. Soit T une théorie supersimple ou stable, $M \models T$ un modèle et soit Y un ensemble fini. Une famille $S := (C_w)_{w \in \mathcal{P}(Y)}$ de sous-ensembles de M^{eq} satisfaisant, pour tout $w \subseteq Y$

(i) $C_w \subseteq C_{w'}$ pour tout $w \subseteq w' \subseteq Y$ et

(ii) $C_w \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{\bigcup_{w' \subsetneq w} C_{w'}} \bigcup_{\tilde{w} \not\supseteq w} C_{\tilde{w}}$.

est appelée un *Y-système indépendant* .

On dit que c'est un *Y-système indépendant de modèles* si en outre $C_w = M_w \preccurlyeq M$ pour tout $w \subseteq Y$.

Dans [Sh90], Shelah appelle les systèmes indépendants des *systèmes stables*. Or, comme cette notion nous intéresse surtout dans des théories simples non-stables, ce terme prêterait à confusion.

Fait 1.2.2 ([Sh90, XII.2.5])**.** *Soit T une théorie stable, et $(M_w)_{w \in \mathcal{P}(Y)}$ un Y-système indépendant de modèles. Supposons que $w \not\subseteq \tilde{w}_i$, pour $i = 1, \dots, r$, et posons $w'_i := \tilde{w}_i \cap w$.*

Si, pour une formule $\varphi(\overline{z}_w, \overline{z}_{\tilde{w}_1}, \dots, \overline{z}_{\tilde{w}_r})$ et des uplets $\overline{a}_w \in M_w$, $\overline{a}_{\tilde{w}_i} \in M_{\tilde{w}_i}$ pour $i = 1, \dots r$, on a $\models \varphi(\overline{a}_w, \overline{a}_{\tilde{w}_1}, \dots, \overline{a}_{\tilde{w}_r})$, alors il existe $\overline{a}'_{w'_i} \in M_{w'_i}$ (avec $\overline{a}'_{w'_i} = \overline{a}_{\tilde{w}_i}$ si $\overline{a}_{\tilde{w}_i} \in M_{w'_i}$) tels que $\models \varphi(\overline{a}_w, \overline{a}'_{w'_1}, \dots, \overline{a}'_{w'_r})$. □

Une fois pour toute, on choisit un ordre total $\prec$ sur $\mathcal{P}(Y)$ tel que $w \subsetneq w'$ implique $w \prec w'$. Puis, si $S = (C_w)_{w \in \mathcal{P}(Y)}$ est un Y-système indépendant, on introduit les notations suivantes : on pose $A^S_w := \bigcup_{w' \subsetneq w} C_{w'}$ et $B^S_w := \bigcup_{w' \prec w} C_{w'}$.

Fait 1.2.3 ([Sh90, XII.2.3])**.** *Supposons que $S := (C_w)_{w \in \mathcal{P}(Y)}$ satisfait (i) et, pour tout $w \subseteq Y$, la propriété suivante :*

(ii') $C_w \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A^S_w} B^S_w$.

Alors, S est un Y-système indépendant. □

Lemme 1.2.4. *Soit T une $\mathcal{L}$-théorie stable, T' le réduit de T par rapport à $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$. Puis, soit $S := (M_w)_{w \subseteq Y}$ un Y-système indépendant de modèles de T. Alors $S' := (M'_w)_{w \subseteq Y}$ est un Y-système indépendant de modèles de T', où $M'_w := M_w \restriction_{\mathcal{L}'}$.*

Preuve. Il suffit de montrer que $M_w \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}'_{A^S_w} B^S_w$ pour tout w, la propriété (i) étant trivialement satisfaite. Prenons $\overline{m} \in M_w$ et posons $p' := \mathrm{tp}_{\mathcal{L}'}(\overline{m}/A^S_w)$. Pour toute $\mathcal{L}'(\emptyset)$-formule $\varphi'(\overline{x}, \overline{y})$ il existe une $\mathcal{L}'(A^S_w)$-formule $\chi'(\overline{y})$ telle que pour tout $\overline{c}$ on ait $\models \chi'(\overline{c})$ ssi $\varphi'(\overline{x}, \overline{c})$ est contenue dans une extension non-déviante de p' à $A^S_w\overline{c}$. En particulier on a $\models \chi'(\overline{a})$ pour tout $\overline{a} \in A^S_w$ avec $\varphi'(\overline{x}, \overline{a}) \in p'$.

On raisonne par l'absurde. On trouve donc $\bar{b} \in B_w^S$ avec $\models \neg\chi'(\bar{b}) \wedge \varphi'(\overline{m}, \bar{b})$. Donc, par le Fait 1.2.2, il existe $\bar{a} \in A_w^S$ avec $\models \neg\chi'(\bar{a}) \wedge \varphi'(\overline{m}, \bar{a})$. Contradiction. $\square$

Dans la majorité des cas dans la suite, l'ensemble Y sera $\mathbf{n} := \{0, \ldots, n-1\}$. Nous notons $\mathcal{P}^-(\mathbf{n}) := \mathcal{P}(\mathbf{n}) \setminus \{\mathbf{n}\}$. Pour $i = 0, \ldots, n-1$, $\hat{\imath}$ dénote l'ensemble $\mathbf{n} \setminus \{i\}$ (un élément de $\mathcal{P}^-(\mathbf{n})$). De manière similaire, $\widehat{\imath\jmath} := \mathbf{n} \setminus \{i, j\}$. Pour tout $w \in \mathcal{P}^-(\mathbf{n})$, on se donne un ensemble (infini) de variables x_w tel que $x_w \cap x_{w'} = x_{w \cap w'}$ pour tout w, w'. Si $p_w(x_w)$ est un type complet et $C_w \models p_w$, pour $w' \subseteq w$, $C_{w'}$ est le sous-ensemble de C_w qui correspond à l'inclusion $x_{w'} \subseteq x_w$.

Définition 1.2.5. Soit T supersimple ou stable, et n un entier naturel.

(1) Un *problème de n-amalgamation* est la donnée de types complets $p_w(x_w)$ pour $w \in \mathcal{P}^-(\mathbf{n})$ tels que pour tout $i \in \mathbf{n}$ et tout $C_{\hat{\imath}} \models p_{\hat{\imath}}$ on ait :

$(C_w)_{w \subseteq \hat{\imath}}$ est un $\hat{\imath}$-système indépendant.

(2) Une *solution* à un tel problème est la donnée d'un uplet de variables $x_{\mathbf{n}}$ (contenant $\bigcup_{i=0}^{n-1} x_{\hat{\imath}}$) et un type complet $p_{\mathbf{n}}(x_{\mathbf{n}})$ tel que $p_{\mathbf{n}}(x_{\mathbf{n}}) \vdash p_{\hat{\imath}}(x_{\hat{\imath}})$ pour tout i et si $\tilde{C}_{\mathbf{n}} \models p_{\mathbf{n}}$, alors $(\tilde{C}_w)_{w \in \mathcal{P}(\mathbf{n})}$ est un $\mathbf{n}$-système indépendant.

(3) Un problème de n-amalgamation $p_w(x_w)_{w \in \mathcal{P}^-(\mathbf{n})}$ est *borné* si pour tout $i \in \mathbf{n}$ et $C_{\hat{\imath}}$ réalisant $p_{\hat{\imath}}$, on a
   (a) $C_{\hat{\imath}} \subseteq \mathrm{acl}^{eq}(\bigcup_{j \in \hat{\imath}} C_{\{j\}})$,
   (b) $\mathrm{acl}^{eq}(C_w) = \mathrm{dcl}^{eq}(C_w)$ pour tout w.

   On dit que la théorie T a la *propriété de n-amalgamation*, si tout problème de n-amalgamation borné (dans T) a une solution.

(4) On dit que le problème de n-amalgamation $p_w(x_w)_{w \in \mathcal{P}^-(\mathbf{n})}$ est un *problème de n-amalgamation de modèles* si pour tout $i \in \mathbf{n}$ et tout $C_{\hat{\imath}}$ réalisant $p_{\hat{\imath}}$, $(C_w)_{w \subseteq \hat{\imath}}$ est un $\hat{\imath}$-système indépendant de modèles.

   On dit que T a la *propriété de n-amalgamation de modèles* si tout problème de n-amalgamation de modèles dans T admet une solution.

A priori, tous les types peuvent être considérés comme des types sur $C_\emptyset \models p_\emptyset$.

Remarque 1.2.6. *En général, on s'intéresse au cas où la base (donnée par une solution de $p_\emptyset$) est un modèle de T et dans ce cas nous parlerons de* propriété de n-amalgamation au-dessus d'un modèle.

Toute théorie supersimple a la propriété de 3-amalgamation. La théorie d'un corps pseudo-fini a la propriété de n-amalgamation pour tout n [Hr02], de même la théorie d'un corps algébriquement clos avec un autormorphisme générique [CH99]. Il existe cependant des exemples de théories supersimples ne satisfaisant pas la propriété de 4-amalgamation au-dessus d'un modèle, et plus généralement, des théories supersimples satisfaisant la n-amalgamation au-dessus d'un modèle, mais pas la $(n+1)$-amalgamation (voir [Ko03]).

Le fait suivant est bien connu :

Fait 1.2.7. *Soit T stable, et $(p_w(x_w))_{w\in\mathcal{P}^-(n)}$ un problème de n-amalgamation de modèles de T. Alors*

(1) Il existe une solution $p_{\mathbf{n}}(x_{\mathbf{n}})$ à ce problème.

(2) Cette solution est unique dans le sens suivant : si $p'_{\mathbf{n}}(x'_{\mathbf{n}})$ est une deuxième solution, alors $p_{\mathbf{n}}\restriction_{\bigcup x_i} = p'_{\mathbf{n}}\restriction_{\bigcup x_i}$ (voir 1.2.5(2)).

Preuve. On montre (1) et (2) simultanément par une induction sur n. Si $n \leq 1$, c'est trivial. Si $n = 2$, (1) est vrai par l'existence d'une extension non-déviante. Cette dernière est unique, car un type au-dessus d'un modèle est stationnaire, d'où (2) dans le cas $n = 2$. Soit donc $n \geq 3$. Pour montrer (1), c'est à dire l'existence d'une solution, on choisit $M_w \models p_w$ pour tout $w \in \mathcal{P}^-(\mathbf{n})$. Soit $\prec$ un ordre total sur $\mathcal{P}^-(\mathbf{n})$ qui renforce $\subsetneq$, et soit $M_\emptyset \preccurlyeq M_{\mathbf{n}}$ un modèle très saturé de T. Par induction sur $\prec$, on construit des plongements élémentaires $\iota_w : M_w \hookrightarrow M_{\mathbf{n}}$ tels que

$(I)_w$ $\iota_w(x_{w'}^{M_w}) = \iota_{w'}(x_{w'}^{M_{w'}})$ pour tout $w' \subsetneq w$ et

$(II)_w$ $\iota_w(M_w) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bigcup_{w'\subsetneq w}\iota_{w'}(M_{w'})} \bigcup_{\tilde{w}\prec w}\iota_{\tilde{w}}(M_{\tilde{w}})$.

Supposons que de tels plongements $\iota_{\tilde{w}}$ soient construits pour tout $\tilde{w} \prec w$, satisfaisant $(I)_{\tilde{w}}$ et $(II)_{\tilde{w}}$. En particulier, c'est le cas pour tout $w' \subsetneq w$. Si $k < n$ est la cardinalité de w, les modèles M_w et $M_{\mathbf{n}}$ sont deux solutions du même problème de k-amalgamation de modèles. Par induction, on a l'unicité (2) pour de telles solutions. Cela montre que l'application naturelle

$$\sigma_w : (\bigcup_{w'\subsetneq w} x_{w'})^{M_w} \to M_{\mathbf{n}}$$

qui envoie $(\bigcup_{w'\subsetneq w} x_{w'})^{M_w}$ sur $\bigcup_{w'\subsetneq w}\iota_{w'}(M_{w'})$, est élémentaire. On étend σ_w en un plongement élémentaire $\iota_w : M_w \hookrightarrow M_{\mathbf{n}}$ de telle manière que $(II)_w$ soit satisfait. Pour cela, il suffit de réaliser dans $M_{\mathbf{n}}$ une extension non-déviante à $\bigcup_{\tilde{w}\prec w}\iota_{\tilde{w}}(M_{\tilde{w}})$ de la σ_w-copie de $\mathrm{tp}(M_w/(\bigcup_{w'\subsetneq w} x_{w'})^{M_w})$. C'est possible car $M_{\mathbf{n}}$ est suffisamment saturé. Par construction de σ_w, on a $(I)_w$ aussi.

Cette construction fournit une solution du problème de n-amalgamation de modèles. L'unicité d'une telle solution se montre par induction sur $\prec$, puisque $\mathrm{tp}(\iota_w(x_w^{M_w})/\bigcup_{w'\subsetneq w}\iota_{w'}(M_{w'}))$ n'a qu'une seule extension non-déviante à l'ensemble $\bigcup_{\tilde{w}\prec w}\iota_{\tilde{w}}(M_{\tilde{w}})$, par le Fait 1.2.2. □

1.3 Prégéométries et ensembles fortement minimaux

Dans cette section, nous rappelons la notion d'une prégéométrie combinatoire (en combinatoire, on dit également *matroïde*) et nous discutons les ensembles fortement minimaux, l'endroit principal où des exemples de telles prégéométries apparaissent en théorie des modèles. Nous suivons essentiellement l'exposition de [Pi96].

Définition 1.3.1. Une *prégéométrie (combinatoire)* est la donnée d'un ensemble X et d'un *opérateur de clôture* $\mathrm{cl}(\cdot) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ satisfaisant, pour tout $A \subseteq X$ et pour tout $a, b \in X$ (où a et b sont des singletons) :

(i) (*monotonie*) $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$.

(ii) (*transitivité*) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A)) = \mathrm{cl}(A)$.

(iii) (*propriété d'échange de Steinitz*) Si $a \in \mathrm{cl}(A \cup \{b\}) \setminus \mathrm{cl}(A)$, alors $b \in \mathrm{cl}(A \cup \{a\})$.

(iv) (*caractère fini*) Si $a \in \mathrm{cl}(A)$, il existe un sous-ensemble $A_0 \subseteq A$ fini tel que $a \in \mathrm{cl}(A_0)$.

Les ensembles de la forme $A = \mathrm{cl}(A)$ sont appelés *clos*.

Soit (X, cl) une prégéométrie. Alors :

– (X, cl) est une *géométrie*, si de plus $\mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$ et $\mathrm{cl}(\{a\}) = \{a\}$ pour tout singleton $a \in X$.

– (X, cl) est *homogène* si pour tout sous-ensemble clos A de X et tout $a, b \in X \setminus A$ il existe un A-automorphisme de (X, cl) (c.à.d. une permutation de X qui préserve cl et qui fixe chaque élément de A) qui envoie a sur b.

Si (X, cl) est une prégéométrie, on peut définir de manière canonique une géométrie (X', cl'), appelée *géométrie associée à* (X, cl), via $X' := \{\mathrm{cl}(a) \mid a \in X \setminus \mathrm{cl}(\emptyset)\}$ et $\mathrm{cl}'(A') := \{\mathrm{cl}(b) \in X' \mid b \in \mathrm{cl}(\bigcup_{a' \in A'} a')\}$.

Puis, pour $A \subseteq X$, on peut *localiser* (X, cl) *à* A pour obtenir la prégéométrie (X, cl_A) où $\mathrm{cl}_A(B) := \mathrm{cl}(A \cup B)$ pour tout $B \subseteq X$.

Remarque 1.3.2. *Soit* (X, cl) *une prégéométrie. On dit que l'ensemble* $B \subseteq X$ *est* indépendant au-dessus de A *si* $b \notin \mathrm{cl}_A(B \setminus \{b\})$ *pour tout* $b \in B$. *On dit que* B *est une* base pour $C \supseteq B$ au-dessus de A *si* B *est indépendant au-dessus de* A *et* $C \subseteq \mathrm{cl}_A(B)$.

Par la propriété d'échange de Steinitz, de telles bases existent (tout sous-ensemble de C *qui est indépendant au-dessus de* A *et maximal avec cette propriété est une base de* C *au-dessus de* A*), et deux bases ont la même cardinalité. Cette cardinalité est appelée la* dimension de C au-dessus de A *et notée* $\dim(C/A)$.

Enfin, on dit que C est indépendant de D au-dessus de A, *si* $\dim(C_0/A) = \dim(C_0/A \cup D)$ *pour tout sous-ensemble fini* C_0 *de* C.

Définition 1.3.3. Soit (X, cl) une prégéométrie.

– (X, cl) est *triviale*, si $\mathrm{cl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{cl}(\{a\})$ pour tout $A \subseteq X$.

– (X, cl) est *modulaire*, si pour tous ensembles clos $A, B \subseteq X$, A est indépendant de B au-dessus de $A \cap B$. De manière équivalente, pour tous ensembles clos A, B de dimension finie, $\dim(AB) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$.

– (X, cl) est *localement modulaire* s'il existe $a \in X$ tel que $(X, \mathrm{cl}_{\{a\}})$ soit modulaire.

– (X, cl) est *projective* (*localement projective* , respectivement) si (X, cl) est non-triviale et modulaire (localement modulaire, respectivement).

– (X, cl) est *localement finie* si $\mathrm{cl}(A)$ est fini pour tout $A \subseteq_\omega X$.

Notons qu'une prégéométrie triviale est modulaire.

Fait 1.3.4. *Soit* (X, cl) *une prégéométrie modulaire. Alors, le treillis des sous-ensembles clos de* X *est modulaire. Cela signifie : Si* C *et* $A \subseteq B$ *sont des ensembles clos, alors* $\mathrm{cl}(A(B \cap C)) = B \cap \mathrm{cl}(AC)$.

Fait 1.3.5. *Soit* (X, cl) *une géométrie projective de dimension au moins 4, telle que tous les ensembles clos de dimension 2 contiennent au moins 3 éléments. Alors* (X, cl) *est la géométrie projective sur un corps gauche* F.

Les prégéométries (en général finies et non-homogènes) jouent un rôle important dans la théorie des graphes. Or, ce sont d'autres exemples de prégéométries qui nous intéressent, celles issues d'ensembles fortement minimaux. Donnons d'abord quelques exemples :

Exemples 1.3.6. (1a) Soit X un ensemble et $\mathrm{cl}(\cdot)$ défini par $\mathrm{cl}(A) := A$ pour tout $A \subseteq X$. Alors, (X, cl) est une géométrie triviale.

(1b) Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. Pour $A \subseteq X$, soit $\mathrm{cl}(A) := G \cdot A$ la réunion de toutes les orbites d'éléments de A. Alors, (X, cl) est une prégéométrie triviale (en général non-homogène), et la géométrie associée est donnée par l'espace des orbites.

(2) Soit F un corps gauche et V un espace vectoriel sur F. Pour $A \subseteq V$, on pose $\mathrm{cl}(A) := \langle A \rangle_F$, le F-sous-espace vectoriel de V engendré par A. La prégéométrie (V, cl) est homogène et projective. L'indépendance au sens de la prégéométrie est alors égale à l'indépendance linéaire. La géométrie associée s'obtient en prenant la projectivisation de V, et elle correspond précisément à la géométrie projective sur F.

(3) Soit F un corps gauche et soit $\mathcal{A}$ un espace affine sur F, et prenons pour $\mathrm{cl}(B)$ le plus petit F-sous-espace affine de $\mathcal{A}$ contenant B. Alors, $(\mathcal{A}, \mathrm{cl})$ est une prégéométrie localement modulaire non-modulaire (la non-modularité vient des sous-espaces parallèles). De plus, $(\mathcal{A}, \mathrm{cl})$ est homogène, et c'est une géométrie (la géométrie affine sur F).

(4) Soit K un corps commutatif. Pour $A \subseteq K$, soit $\mathrm{acl}(A)$ la clôture algébrique (relative) du corps engendré par A dans K. Alors, (K, acl) est une prégéométrie. Si K est algébriquement clos, cette prégéométrie est homogène. Si de plus le degré de transcendance de K est au moins 3, alors (K, acl) n'est pas localement modulaire.

Notation. Si π est un type partiel, on dénote par $\mathrm{RM}(\pi)$ le rang de Morley de π, par $\mathrm{DM}(\pi)$ le degré de Morley de π et par $\mathrm{RDM}(\pi)$ la paire $(\mathrm{RM}(\pi), \mathrm{DM}(\pi))$. Si p est un type complet dans une théorie stable, $\mathrm{U}(p)$ dénote le rang de Lascar de p.

Définition 1.3.7. Soit T une théorie complète. On dit que T est *fortement minimale* si pour tout $M \models T$ et pour tout sous-ensemble définissable (avec paramètres) $X \subseteq M$ on a : ou bien X est fini ou bien $M \setminus X$ est fini. De manière équivalente, $\mathrm{RDM}(x = x) = (1, 1)$.

Si T est fortement minimale, tous les rangs raisonnables coïncident dans T. En particulier, on a $\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{U}(\bar{a}/A)$. Dans tout modèle $M \models T$, l'opérateur de clôture algébrique $\mathrm{acl}(\cdot)$ définit une prégéométrie homogène, et on a $\dim(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/A)$ pour la dimension associée à cette prégéométrie. Si $\mathfrak{C} \models T$ est un modèle monstre (en fait, ω-saturé suffirait ici), on appelle T triviale / modulaire etc. si et seulement si la prégéométrie induite par acl sur $\mathfrak{C}$ est triviale / modulaire etc.

Voici quelques exemples :

Exemples 1.3.8. Les théories suivantes sont complètes et fortement minimales. Elles éliminent les quanteurs dans les langages donnés :

(1a) La théorie d'un ensemble infini sans structure (triviale).

(1b) Soit G un groupe et X un ensemble infini sur lequel G agit librement. Soit T la théorie de X considéré dans le langage $\mathcal{L} = \{g \mid g \in G\}$ où g est un symbole de fonction unaire désignant la multiplication par g. La théorie T est triviale, et localement finie ssi G est fini.

(2) Soit EV_F la théorie d'un espace vectoriel infini sur un corps gauche F, dans le langage $\mathcal{L} = \{0, +, \lambda \mid \lambda \in F\}$, où λ désigne la multiplication scalaire par λ. EV_F est projective (localement finie ssi F est un corps fini).

(3) Soit F un corps gauche et $\mathcal{A}$ un espace affine infini sur F. On considère $\mathcal{A}$ dans le langage $\mathcal{L} = \{f(x,y,z), g_\lambda(x,y) \mid \lambda \in F\}$, où $f(x,y,z) = x + y - z$ et $g_\lambda(x,y) = \lambda x + (1-\lambda)y$, pour obtenir la théorie EA_F. Cette théorie est localement projective non-modulaire (localement finie ssi F est un corps fini).

(4) Soit $T = ACF_p$ la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p fixée ($p = 0$ ou premier), considérée dans le langage des corps $\mathcal{L} = \{0, 1, +, \cdot\}$. Cette théorie n'est pas localement modulaire.

On peut *interpréter* une théorie fortement minimale dans une autre, par exemple la théorie EV_F d'un espace vectoriel infini sur F dans EA_F, en quotientant l'ensemble des paires d'éléments par la relation d'équivalence $(x,y) \sim (x',y') :\Leftrightarrow f(x,y',x') = y$ et en définissant les opérations $+$ et λ de manière évidente. Dans cet exemple, toute la structure induite par EA_F sur $\mathcal{A}^2/\!\sim$ est définissable dans le langage de l'espace vectoriel.

La présence de prégéométries en théorie des modèles n'est pas restreinte aux théories fortement minimales. D'abord, en utilisant les inégalités de Lascar, on obtient le fait suivant :

Fait 1.3.9. *Soit T une théorie simple et complète de rang* SU *égal à 1. Alors,* $\mathrm{acl}_T(-)$ *induit une prégéométrie sur tout modèle de T. Si* d *dénote la dimension associée à cette prégéométrie, alors* $\mathrm{d}(\bar{a}/A) = \mathrm{SU}(\bar{a}/A)$.

Puis, on note que si $\mathbb{D}$ est un ensemble fortement minimal (c'est à dire $\mathrm{RDM}(\mathbb{D}) = (1,1)$) dans une théorie stable T, tout ce que nous disons par rapport aux théories fortement minimales s'applique si l'on se restreint aux réalisations de $\mathbb{D}$. Si $\mathbb{D}$ est B-définissable et $\mathfrak{C} \models T$, alors l'ensemble $\mathbb{D}^{\mathfrak{C}}$ des réalisations de $\mathbb{D}$ dans $\mathfrak{C}$ devient une prégéométrie, si on considère l'opérateur de clôture $A \mapsto \mathrm{acl}(AB) \cap \mathbb{D}$ pour $A \subseteq \mathbb{D}^{\mathfrak{C}}$.

Enfin, si $p \in S(B)$ est un type (stationnaire et) minimal, c'est à dire $\mathrm{U}(p) = 1$, alors $A \mapsto \mathrm{acl}(AB) \cap p^{\mathfrak{C}}$ induit une prégéométrie sur l'ensemble des réalisations de p. Plus généralement, si $p \in S(B)$ est un type stationnaire et régulier, alors la relation de déviation induit une prégéométrie sur $p^{\mathfrak{C}}$, c'est à dire si pour $a \in p^{\mathfrak{C}}$ et $A \subseteq p^{\mathfrak{C}}$, on définit $a \in \mathrm{cl}(A)$ ssi $a \not\perp\!\!\!\perp_B A$ (cf. [Pi96, Section 1.4]).

La première information générale sur la géométrie d'une théorie fortement minimale provient du résultat suivant :

Fait 1.3.10 (Cherlin, Mills, Neumann, Zilber)**.** *Soit T fortement minimale et ω-catégorique. Alors T est localement modulaire. Si la géométrie de T n'est pas triviale, elle est ou bien la géométrie projective ou bien la géométrie affine sur un corps fini.*

Fait 1.3.11. *Soit T une théorie fortement minimale. Alors T est localement modulaire si et seulement si T est monobasée.*

On sait par le Fait 1.3.5 que si la théorie T est localement projective, alors une localisée de sa géométrie est la géométrie projective sur un corps gauche F. En fait, Hrushovski a montré que ce corps gauche est modèle-théoriquement présent. Dans ce qui suit, nous discutons brièvement ce résultat.

Soit T la théorie d'un groupe fortement minimal (nous renvoyons à [Pi96, Section 4.5] pour la suite). Notons qu'un tel groupe est abélien par un résultat de Reineke. Supposons que T est localement modulaire, et soit $G \models T$ un modèle suffisamment saturé. Posons $G_0 := \mathrm{acl}(\emptyset) \subseteq G$. C'est un sous-groupe de G.

On considère des paires (h, H), où $H \leq G$ est un sous-groupe fini et $\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset)$-définissable de G et $h : G \to G/H$ est un homomorphisme $\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset)$-définissable. Pour de tels $(h_i, H_i)_{i=1,2}$ on définit

$$(h_1, H_1) \sim (h_2, H_2) :\Leftrightarrow \pi_1 \circ h_1 = \pi_2 \circ h_2 : G \to G/(H_1 + H_2),$$

où $\pi_i : G/H_i \to G/(H_1 + H_2)$ est la projection canonique. On montre que $\sim$ définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des paires (h, H) considérées. On définit alors la somme de (h_1, H_1) et (h_2, H_2) comme l'homomorphisme $\pi_1 \circ h_1 + \pi_2 \circ h_2 : G \to G/(H_1 + H_2)$, et le produit $(h_1, H_1) \cdot (h_2, H_2)$ comme l'homomorphisme $G \xrightarrow{h_2} G/H_2 \xrightarrow{\bar{h}_1} G/(h_1(H_2) + H_1)$. Les opérations de somme et produit passent aux $\sim$-classes d'équivalence, et on obtient donc une structure d'anneau sur l'ensemble des $\sim$-classes, l'*anneau des quasi-endomorphismes de G*, noté $QE(G)$. Un élément $f = (h, H)/\sim$ de $QE(G)$ est un *quasi-endomorphisme de G*, et on peut l'identifier avec un endomorphisme f de G/G_0.

L'anneau $QE(G)$ régit toute la prégéométrie de G. En effet :

Fait 1.3.12 ([Hr85])**.** *Soit G un groupe fortement minimal localement modulaire et $QE(G)$ l'anneau des quasi-endomorphismes de G. Alors, $QE(G)$ est un corps gauche (le* corps des quasi-endomorphismes de G*), et on a la propriété suivante :*

Pour $a_1, \ldots, a_n, b \in G$ on a $b \in \mathrm{acl}(\overline{a})$ si et seulement s'il existe $f_1, \ldots, f_n \in QE(G)$ tels que $(b + G_0) = f_1(a_1 + G_0) + \ldots + f_n(a_n + G_0)$.

En particulier, G est modulaire.

De plus, généralisant les techniques de constructions de groupes dues à Zilber, Hrushovski a montré le résultat suivant.

Fait 1.3.13 ([Hr85]). *Soit T une théorie fortement minimale localement projective. Alors il existe un groupe fortement minimal G qui est interprétable dans T avec des paramètres dans* $\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset)$. *Puis (soit $\mathfrak{g}$ le type générique de T) :*

(1) Si T est projective, et si p est le type générique de G, alors $p \not\perp^a_{\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset)} \mathfrak{g}$.

(2) Si T est localement projective non-modulaire, il existe un type fortement minimal isolé q dans T^{eq} tel que G agit sur q de manière définissable et régulière. De plus $q \perp^a_{\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset)} \mathfrak{g}$ (et $q \not\perp \mathfrak{g}$, bien sûr).

Par ces deux faits, un ensemble fortement minimal projectif est donc “à peu près” un espace vectoriel sur un corps gauche, tandis qu'un ensemble fortement minimal localement projectif non-modulaire est “à peu près” un espace affine sur un corps gauche.

Remarque 1.3.14. *Les résultats mentionnés (1.3.12 et 1.3.13) ont des analogues dans un contexte plus général, pour p un type minimal localement projectif ou même un type régulier localement modulaire (non-trivial) quelconque [Hr85].*

Définition 1.3.15. Soient $T' \subseteq T$ une expansion de théories complètes (dans des langages $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$) et $\mathfrak{C} \models T$ un modèle monstre de T. On dit que l'expansion $T' \subseteq T$ est *essentielle* s'il existe un ensemble $\mathcal{L}$-définissable (avec paramètres) dans $\mathfrak{C}$ qui n'est pas $\mathcal{L}'$-définissable (avec paramètres). Si $T' \subseteq T$ n'est pas essentielle, on l'appelle *inessentielle*.

Définition 1.3.16. Une théorie fortement minimale T (ou plus généralement une théorie de rang de Morley fini) a la *DMP (definable multiplicity property)*, si pour toute formule $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$ (sans paramètres) et tout $\overline{b} \in M \models T$ on a : Si $\mathrm{RDM}(\varphi(\overline{x}, \overline{b})) = (n, d)$, il existe $\theta(\overline{z}) \in \mathrm{tp}(\overline{b})$ telle que pour tout $\overline{b}'$ satisfaisant θ on ait $\mathrm{RDM}(\varphi(\overline{x}, \overline{b}')) = (n, d)$.

Notons que le rang de Morley est toujours définissable dans une théorie fortement minimale (même dans toute théorie $\aleph_1$-catégorique). On observe que, pour des raisons techniques, la DMP est importante dans les constructions par la méthode d'amalgamation de Hrushovski.

Voici le résultat de “fusion” de Hrushovski mentionné dans l'introduction :

Théorème 1.3.17 ([Hr92]). *Soient T_1, T_2 des théories fortement minimales complètes dans des langages dénombrables $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ respectivement. On suppose que T_1 et T_2 ont la DMP, et que $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{=\}$. Alors il existe, pour $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, une $\mathcal{L}$-théorie fortement minimale T telle que $T\upharpoonright_{\mathcal{L}_i} = T_i$ pour $i = 1, 2$, et telle que T ait la DMP.*

De plus, T est telle que les ensembles $\mathcal{L}_1$-définissables et $\mathcal{L}_2$-définissables “interagissent le moins possible”. En particulier, si T_2 n'est pas définissable dans le langage de l'égalité, alors T est une expansion essentielle de T_1.

Il est bien connu que ACF_p a la DMP (par exemple par l'existence de bornes dans la théorie des idéaux polynomiaux au-dessus des corps). Le théorème s'applique donc à ACF_p.

Nous terminons la section avec deux faits élémentaires que nous utiliserons souvent.

Fait 1.3.18. *Soient T une $\mathcal{L}$-théorie fortement minimale, $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ et $T' := T\restriction_{\mathcal{L}'}$ le $\mathcal{L}'$-réduit de T (donc T' est fortement minimale aussi). Soit $\varphi'(\overline{x})$ une $\mathcal{L}'$-formule. Alors $\mathrm{RM}_{\mathcal{L}'}(\varphi'(\overline{x})) = \mathrm{RM}_{\mathcal{L}}(\varphi'(\overline{x}))$.*

Preuve. C'est une conséquence de 1.1.8, compte tenu de l'égalité RM = SU dans une théorie fortement minimale. □

Une expansion $T \supseteq T'$ de théories fortement minimales comme dans 1.3.18 sera appelée une *expansion fortement minimale* .

Fait 1.3.19. *Soient T fortement minimale et $A = \mathrm{acl}(A) \subseteq M \models T$ avec A infini. Alors $A \preccurlyeq M$. En particulier, tout type au-dessus d'un ensemble algébriquement clos infini est stationnaire.*

Si $\mathrm{acl}(\emptyset)$ est infini, alors T élimine faiblement les imaginaires : pour tout $\alpha \in M^{eq}$ il existe un uplet réel $\overline{a} \in M$ tel que $\alpha \in \mathrm{dcl}^{eq}(\overline{a})$ et $\overline{a} \in \mathrm{acl}^{eq}(\alpha)$.

1.4 Amalgames de Fraïssé-Hrushovski

Dans cette section, nous rappelons d'abord la méthode d'amalgamation selon Fraïssé. Puis, nous expliquons la variation de cette technique introduite par Hrushovski. Nous présentons les contextes les plus élémentaires, et les résultats ne seront pas explicitement utilisés après (nous serons obligés de montrer des versions plus générales de ces résultats). Par contre, le matériel présenté pourra servir pour donner une intuition.

Dans [Fr54], Fraïssé a introduit une méthode de construction de structures homogènes à partir d'une classe de structures finies (ou finiment engendrées) si cette classe a certaines propriétés. Pour commencer, nous considérons le cas le plus facile. Soit $\mathcal{L}$ un langage fini sans symboles de fonctions, et soit $\mathcal{C}$ une classe de $\mathcal{L}$-structures finies, close par $\mathcal{L}$-isomorphismes. On suppose :

(HP) $\mathcal{C}$ est une classe *héréditaire*, c'est à dire pour tout $A \in \mathcal{C}$ et toute sous-structure $B \subseteq A$ on a $B \in \mathcal{C}$.

(JEP) $\mathcal{C}$ a la *propriété du plongement commun* : pour tout $A, B \in \mathcal{C}$ il existe $C \in \mathcal{C}$ et des plongements $\iota : A \hookrightarrow C$, $\iota' : B \hookrightarrow C$.

(AP) $\mathcal{C}$ a la *propriété d'amalgamation* : Soient $B, A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ et $\iota_i : B \hookrightarrow A_i$ des plongements (pour $i = 1, 2$). Alors il existe $C \in \mathcal{C}$ et des plongements $\iota'_i : A_i \hookrightarrow C$ $(i = 1, 2)$ tels que $\iota'_1 \circ \iota_1 = \iota'_2 \circ \iota_2$.

On observe que par nos hypothèses sur le langage $\mathcal{L}$, une telle classe $\mathcal{C}$ ne contient qu'un nombre dénombrable de $\mathcal{L}$-structures à isomorphisme près, et la classe $\tilde{\mathcal{C}}$ des $\mathcal{L}$-structures M telles que toute sous-structure finie $M_0 \subseteq M$ soit dans $\mathcal{C}$ est une classe élémentaire. Pour une $\mathcal{L}$-structure M, on définit $\mathrm{age}(M)$

comme l'ensemble de toutes les sous-structures finies de M, appelé l'*âge de* M. Alors $M \in \tilde{\mathcal{C}}$ est équivalent à $\mathrm{age}(M) \subseteq \mathcal{C}$. Notons que l'âge d'une structure a toujours (HP) et (JEP), tandis que pour qu'il ait (AP) , il faut que M soit suffisamment homogène.

Définition 1.4.1. Soit $\mathcal{C}$ comme ci-dessus. Une structure $M \in \tilde{\mathcal{C}}$ est *riche*, si pour tout $B \subseteq A \in \mathcal{C}$ et tout plongement $\iota : B \hookrightarrow M$ il existe un plongement $\tilde{\iota} : A \hookrightarrow M$ étendant ι.

Voilà un premier résultat de [Fr54] :

Fait 1.4.2. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de $\mathcal{L}$-structures finiment engendrées, $\mathcal{C}$ dénombrable avec (HP), (JEP) et (AP). Alors :*

(1) Il existe une structure $M \in \tilde{\mathcal{C}}$ qui est riche et dénombrable.

(2) Si $M, M' \in \tilde{\mathcal{C}}$ sont riches et dénombrables, alors $M \cong M'$. Plus généralement, deux structures riches sont $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalentes, c'est à dire elles se correspondent par un va-et-vient infini.

L'unique structure riche et dénombrable de $\tilde{\mathcal{C}}$ est appelée la *limite de Fraïssé* de $\mathcal{C}$.

Exemples 1.4.3.
- Soit $\mathcal{C}$ la classe des ordres totaux finis, dans $\mathcal{L} = \{<\}$. Alors, $\mathcal{C}$ a (HP), (JEP) et (AP), et $(\mathbb{Q}, <)$ est la limite de Fraïssé de $\mathcal{C}$.
- Soit $\mathcal{C}$ la classe des graphes non-orientés irréflexifs, dans $\mathcal{L} = \{R\}$. Alors, $\mathcal{C}$ a (HP), (JEP) et (AP), et le graphe aléatoire (dénombrable) est la limite de Fraïssé de $\mathcal{C}$.

Dans ces exemples, on voit que la théorie de la limite de Fraïssé est ω-catégorique. Cela est toujours le cas si $\mathcal{L}$ est fini et relationnel, puisque la richesse s'exprime alors par des axiomes.

Si le langage $\mathcal{L}$ n'est pas fini ou contient des symboles de fonctions, alors une classe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$-structures finiment engendrées peut être non-dénombrable ; de plus, $\tilde{\mathcal{C}}$ n'est plus systématiquement une classe élémentaire. Si $\mathcal{C}$ est dénombrable, avec (HP), (JEP) et (AP), alors le Fait 1.4.2 reste vrai. Par contre, la théorie de la limite de Fraïssé n'est pas ω-catégorique en général, par exemple si $\mathcal{C}$ est la classe des groupes abéliens finis.

Remarque 1.4.4. *Si $\mathcal{C}$ est dénombrable avec (HP) et (AP), éventuellement sans (JEP), alors $\mathcal{C}$ est la réunion disjointe de ses* composantes connexes *: $A, B \in \mathcal{C}$ sont dans la même composante connexe s'il existe $C \in \mathcal{C}$ dans laquelle se plongent A et B. Par (AP), cela définit une partition de $\mathcal{C}$.*

On peut toujours définir les structures riches dans $\tilde{\mathcal{C}}$ comme dans 1.4.1. Si $\mathcal{C}$ n'a pas la (JEP), une structure riche n'est alors plus universelle pour $\mathcal{C}$, et deux structures riches M, M' sont $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalentes ssi $\mathrm{age}(M) = \mathrm{age}(M')$ *ssi* $\mathrm{age}(M) \cap \mathrm{age}(M') \neq \emptyset$.

Une classe $\mathcal{C}_0$ a donc la (JEP) si et seulement si elle n'a qu'une seule composante connexe. Pour cette raison, nous disons parfois qu'une classe est *connexe* si elle a la (JEP).

En général, la limite de Fraïssé d'une classe $\mathcal{C}$ n'est pas stable (voir 1.4.3). Afin de construire des structures stables, voire fortement minimales même, Hrushovski a introduit une variation de la méthode d'amalgamation de Fraïssé, variation qui garantit qu'il n'y a pas trop de "relations entre les relations". Nous présentons d'abord un cadre axiomatique dû à Wagner qui reflète quelques aspects de cette variation, dans le cas où $\mathcal{L}$ est relationnel.

Soit $\mathcal{L}$ dénombrable et relationnel, et soit $\mathcal{C}_0$ une classe de $\mathcal{L}$-structures finies, close par isomorphisme avec la (HP), $\mathcal{C}_0$ ne comportant qu'un nombre dénombrable de classes d'isomorphisme. Supposons que sur l'ensemble des paires $A \subseteq B$ de structures de $\mathcal{C}_0$, on ait une relation $A \leq B$ (A est *autosuffisant* ou *fort* dans B), telle que $\leq$ soit invariante par isomorphisme, et soit réflexive et transitive. On suppose que les axiomes suivants sont satisfaits :

(C1) Si $A \subseteq B' \subseteq B \in \mathcal{C}_0$ et $A \leq B$, alors $A \leq B'$.
(C2) Dans $\mathcal{C}_0$, il n'y a pas de chaîne infinie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $A_i \subseteq A_{i+1}$ et $A_i \not\leq A_{i+1}$ pour tout i.
(C3) $\emptyset \leq A$ pour tout $A \in \mathcal{C}_0$.
(C4) Soit $B \in \mathcal{C}_0$ et $A, B' \subseteq B$, avec $A \leq B$. Alors $A \cap B' \leq B'$.
(C5) $(\mathcal{C}_0, \leq)$ a (AP), c'est à dire pour tout $A \leq B_i \in \mathcal{C}_0$ $(i = 1, 2)$ il existe $D \in \mathcal{C}_0$ et des plongements $\iota_i : B_i \hookrightarrow D$ tels que $\iota(B_i) \leq D$ $(i = 1, 2)$ et $\iota_1\restriction_A = \iota_2\restriction_A$.

Soit $\tilde{\mathcal{C}_0}$ la classe des $\mathcal{L}$-structures M avec $\mathrm{age}(M) \subseteq \mathcal{C}_0$. Pour $A \subseteq_\omega M \in \tilde{\mathcal{C}_0}$ on pose $A \leq M$ si $A \leq B$ pour tout $A \subseteq B \subseteq_\omega M$.

Fait 1.4.5. *Supposons que $(\mathcal{C}_0, \leq)$ satisfait (C1–5), et soient $M \in \tilde{\mathcal{C}_0}$ et $A \subseteq_\omega M$. Alors il existe un unique sous-ensemble fini A' de M tel que $A \subseteq A'$ et $A' \leq M$. On appelle $A' = \mathrm{cl}_0^M(A)$ la clôture de A dans M.*

On dit qu'une structure $M \in \tilde{\mathcal{C}_0}$ est *riche pour* $(\mathcal{C}_0, \leq)$ si pour tout $A \leq M$ et $A \leq B \in \mathcal{C}_0$ il existe un A-plongement $\iota : B \hookrightarrow M$ avec $\iota(B) \leq M$. Notons qu'une classe $(\mathcal{C}_0, \leq)$ qui satisfait (C1–5) a également la (JEP) : il suffit de combiner (C3) et (C5).

En variant l'argument de Fraïssé, on obtient le résultat suivant :

Fait 1.4.6. *Suppsons que $(\mathcal{C}_0, \leq)$ satisfait (C1–5). Alors :*

(1) Il existe une $\mathcal{L}$-structure $M \in \tilde{\mathcal{C}_0}$ qui est dénombrable et riche pour $(\mathcal{C}_0, \leq)$.

(2) Si $A \leq M$, $A' \leq M'$ avec M, M' riches pour $(\mathcal{C}_0, \leq)$ et $f : A \cong A' \in \mathcal{C}_0$, alors f fait partie d'un système de va-et-vient infini entre M et M'. En particulier, deux structures riches M et M' sont $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalentes, et si de plus M et M' sont dénombrables, alors $M \cong M'$.

Comme avant, on appelle l'unique structure dénombrable $M_\omega \in \tilde{\mathcal{C}_0}$ qui est riche pour $(\mathcal{C}_0, \leq)$ la *limite de Fraïssé* de $(\mathcal{C}_0, \leq)$. Soit $T_\omega := \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(M_\omega)$, la théorie des structures riches dans $\tilde{\mathcal{C}_0}$. Les structures riches ne capturent pas toujours toutes les informations modèle-théoriques de T_ω, mais sous les conditions du fait suivant, c'est bien le cas.

Fait 1.4.7. *Supposons que* $(\mathcal{C}_0, \leq)$ *satisfait (C1–5), et soit* T_ω *la théorie des structures riches pour* $(\mathcal{C}_0, \leq)$. *On suppose que* $\tilde{\mathcal{C}}_0$ *est une classe élémentaire, et que pour* $A \subseteq_\omega M \preccurlyeq N \models T_\omega$, $A \leq M$ *implique* $A \leq N$. *Alors :*

(1) Sont équivalents :
  - *(i) Il existe une structure riche dans* $\tilde{\mathcal{C}}_0$ *qui est* ω*-saturée.*
  - *(ii) Il existe un modèle* ω*-saturé de* T_ω *qui est riche.*
  - *(iii) Les structures riches dans* $\tilde{\mathcal{C}}_0$ *sont précisément les modèles* ω*-saturés de* T_ω.

(2) Supposons que les conditions équivalentes (i–iii) sont satisfaites, et soient $\overline{a}_i \in M_i \models T_\omega$ *des uplets finis, pour* $i = 1, 2$. *Alors,* $\mathrm{tp}_{T_\omega}(\overline{a}_1) = \mathrm{tp}_{T_\omega}(\overline{a}_2)$ *si et seulement s'il existe un* $\mathcal{L}$*-isomorphisme* $\tilde{\iota} : \mathrm{cl}_0^{M_1}(\overline{a}_1) \cong \mathrm{cl}_0^{M_2}(\overline{a}_2)$ *étendant l'application sous-jacente* ι *qui envoie* $\overline{a}_1$ *sur* $\overline{a}_2$.

Preuve. La partie (1) suit des observations suivantes :
- Soient $M, N \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ avec M riche. Alors, N est riche ssi M et N se correspondent par un va-et-vient infini.
- Soient M, N des modèles d'une théorie complète, avec M ω-saturé. Alors, N est ω-saturé ssi M et N se correspondent par un va-et-vient infini.

Montrons (2). Si $\mathrm{tp}_{T_\omega}(\overline{a}_1) = \mathrm{tp}_{T_\omega}(\overline{a}_2)$, on peut trouver des plongements élémentaires $\iota_i : M_i \hookrightarrow M^*$ tels que $\iota_1(\overline{a}_1) = \iota_2(\overline{a}_2) = \overline{a}$. C'est une conséquence de nos hypothèses que $\iota_i(\mathrm{cl}_0^{M_i}(\overline{a}_i)) = \mathrm{cl}_0^{M^*}(\overline{a})$, et on obtient l'isomorphisme $\tilde{\iota}$ cherché. Réciproquement, supposons qu'on ait $\tilde{\iota} : \mathrm{cl}_0^{M_1}(\overline{a}_1) \cong \mathrm{cl}_0^{M_2}(\overline{a}_2)$. Quitte à passer à des extensions élémentaires (cela ne change pas la clôture par hypothèse), on peut supposer que M_1 et M_2 sont ω-saturés, donc riches par hypothèse. Alors, $\tilde{\iota}$ fait partie d'un système de va-et-vient infini par le Fait 1.4.6(2). On en déduit que $\mathrm{tp}_{T_\omega}(\mathrm{cl}_0^{M_1}(a_1)) = \mathrm{tp}_{T_\omega}(\mathrm{cl}_0^{M_2}(a_2))$. En particulier, $\overline{a}_1$ et $\overline{a}_2$ ont le même type. □

Maintenant, nous présentons un cadre incorporant la construction "ab initio" [Hr93] ainsi que la fusion dans le contexte originel de Hrushovski [Hr92]. Soit $\mathcal{L}$ un langage relationnel (dénombrable) et $\mathcal{C}$ une classe de $\mathcal{L}$-structures finies close par isomorphisme et sous-structures (par convention, $\emptyset$ est une structure dans $\mathcal{C}$ aussi).

Définition 1.4.8. 1. Une fonction $\delta : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}$ invariante par isomorphisme est une *fonction de prédimension sur* $\mathcal{C}$, si les propriétés (P1–3) ci-dessous sont satisfaites :
   - (P1) $\delta(\emptyset) = 0$.
   - (P2) $\delta(\{a\}) \leq 1$.
   - (P3) (*sous-modularité*) $\delta(AB) \leq \delta(A) + \delta(B) - \delta(A \cap B)$.

2. Soit X un ensemble et $\delta : \mathcal{P}_\omega(X) \to \mathbb{Z}$ définie sur les sous-ensembles finis de X. On dit que δ est une *fonction de prédimension sur* X, si les propriétés (P1–3) sont satisfaites.

   On dit que δ est une *fonction de dimension sur* X, si δ satisfait de plus :
   (P4) $\delta(B) \leq \delta(A)$ pour tout $B \subseteq A \subseteq_\omega X$.

Notons que si δ est une fonction de dimension sur X, alors $\delta(A) \in \mathbb{N}$ pour tout $A \subseteq_\omega X$, par (P1) et (P4). Si δ est une fonction de prédimension et $A \cup B \in \mathcal{C}$, on pose $\delta(A/B) := \delta(AB) - \delta(B)$. Ainsi, la condition de sous-modularité (P3) devient $\delta(A/B) \leq \delta(A/A \cap B)$.

Nous observons que si δ est une fonction de prédimension sur $\mathcal{C}$ et $M \in \tilde{\mathcal{C}}$ (c'est à dire $\mathrm{age}(M) \subseteq \mathcal{C}$), alors δ induit une fonction de prédimension sur (l'ensemble de base de) M.

Fait 1.4.9. *Soit* d *une fonction de dimension sur* X*. Alors* d *est la fonction de dimension pour une prégéométrie sur* X*, donnée par l'opérateur de clôture* cl_d *défini ainsi : pour* $A \subseteq X$ *et* $a \in X$*,* $a \in \mathrm{cl}_\mathrm{d}(A)$ *si et seulement s'il existe* $A_0 \subseteq_\omega A$ *avec* $\mathrm{d}(a/A_0) = 0$.

Définition 1.4.10. Soit δ une fonction de prédimension sur $\mathcal{C}$.
- Soit $B \subseteq A \in \mathcal{C}$. On dit que B est *autosuffisant* (ou *fort)* dans A (noté $B \leq A$) si $\delta(A'/B) \geq 0$ pour tout $B \subseteq A' \subseteq A$.
- On définit $\mathcal{C}_0 := \{A \in \mathcal{C} \,|\, \emptyset \leq A\}$, la classe des structures de $\mathcal{C}$ qui sont de prédimension héréditairement positive.
- Si $M \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et $A \subseteq_\omega M$, la *dimension de* A *dans* M est définie ainsi :

$$\mathrm{d}_M(A) := \min\{\delta(A') \,|\, A \subseteq A' \subseteq_\omega M\}.$$

Fait 1.4.11. *Soit* δ *une fonction de prédimension sur* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ *la classe définie ci-dessus. Alors, la notion de plongement fort* $\leq$ *est invariante par isomorphisme, est réflexive et transitive, et on a :*

(1) $(\mathcal{C}_0, \leq)$ *satisfait aux axiomes (C1–4).*

(2) Pour tout $M \in \tilde{\mathcal{C}}_0$*, la fonction* d_M *définie dans 1.4.10 est une fonction de dimension sur* M*, et on a* $\mathrm{d}_M(A) = \delta(\mathrm{cl}_0^M(A))$ *pour tout* $A \subseteq_\omega M$.

Si dans la situation de 1.4.11, la classe $\mathcal{C}_0$ est dénombrable et $(\mathcal{C}_0, \leq)$ satisfait (C5), c'est à dire (AP) pour les plongements forts, on peut donc construire la limite de Fraïssé M_ω de $(\mathcal{C}_0, \leq)$, et on obtient une prégéométrie sur M_ω.

Exemples 1.4.12. (1) (le contexte "ab initio" [Hr93], voir également [Go89]) Soit $\mathcal{L} = \{R\}$ où R est une relation ternaire, et soit $\mathcal{C}$ la classe des $\mathcal{L}$-structures finies telle que R soit stable par permutation et ne soit satisfait que sur des triplets d'éléments distincts. Pour $A \in \mathcal{C}$, on définit $\delta(A) := |A| - |R^A|$, où nous comptons les triplets dans R à permutation près.

δ est une fonction de prédimension sur $\mathcal{C}$, et $(\mathcal{C}_0, \leq)$ a la propriété d'amalgamation pour les plongements forts. De plus, la limite de Fraïssé est ω-saturée.

(2) (le contexte de la "fusion" [Hr92]) Pour $i = 1, 2$, soit T_i des théories fortement minimales, éliminant les quanteurs dans le langage relationnel dénombrable $\mathcal{L}_i$. On suppose que $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{=\}$. Soit $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ et $\mathcal{C}$ la classe des $\mathcal{L}$-structures finies qui sont modèle de $T_1^\forall \cup T_2^\forall$. Pour $A \in \mathcal{C}$, on pose

$$\delta(A) := \mathrm{d}_1(A) + \mathrm{d}_2(A) - |A|,$$

où d_i désigne la dimension dans T_i, donnée par le rang de Morley.

Alors δ est une fonction de prédimension sur $\mathcal{C}$. Comme dans le premier exemple, $(\mathcal{C}_0, \leq)$ a la propriété d'amalgamation pour les plongements forts, et la limite de Fraïssé est ω-saturée.

Fait 1.4.13. *Dans ces deux exemples, la théorie T_ω de la limite de Fraïssé de $(\mathcal{C}_0, \leq)$ est ω-stable de rang $\leq \omega$, avec un unique type générique $\mathfrak{g}$. Il y a une suite $(\varphi_i(\overline{x}, \overline{z}), \theta_i(\overline{z}))_{i<\omega}$, où φ_i et θ_i sont des $\mathcal{L}_i$-formules avec les propriétés suivantes :*

- *Si $\models \theta_i(\overline{b})$, alors $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b})$ est fortement minimal trivial localement fini, et orthogonal à $\mathfrak{g}$.*
- *Si $\mathrm{tp}(\overline{a}/B)$ est orthogonal à $\mathfrak{g}$, il admet une coordinatisation par des instances des φ_i, c'est à dire si $\mathrm{tp}(\overline{a}/B) \perp \mathfrak{g}$ et $\overline{a} \notin \mathrm{acl}(B)$, il existe $\bar{\alpha} \in \mathrm{acl}(B\overline{a})$, $\overline{b} \in \mathrm{acl}(B)$ et $i < \omega$ tels que $\models \theta_i(\overline{b})$ et $\bar{\alpha}$ soit générique dans $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b})$ au-dessus de B.*

Pour obtenir une théorie fortement minimale dans les deux cas, on définit une classe restreinte $\mathcal{C}_0^c \subseteq \mathcal{C}_0$ qui satisfait toujours (C1–5), et telle que la limite de Fraïssé M^c de $(\mathcal{C}_0^c, \leq)$ soit ω-saturée et $T^c := \mathrm{Th}(M^c)$ une théorie fortement minimale, avec $\mathrm{acl}_{T^c} = \mathrm{cl}_{\mathrm{d}}$.

Pour définir $\mathcal{C}_0^c$, on se sert d'une version affinée du résultat de coordinatisation cité dans le Fait 1.4.13, où les φ_i sont des *codes*. Il est possible de borner uniformément la longueur de toute suite de Morley dans un tel code φ_i donné, à l'aide des approximations suffisamment bonnes des suites de Morley. Arriver ainsi à une classe $\mathcal{C}_0^c$ qui a la propriété d'amalgamation représente une difficulté combinatoire considérable.

Chapitre 2

Fusion libre

Dans ce chapitre, nous montrons comment on peut fusionner librement deux théories supersimples de rang SU égal à 1, au-dessus d'une théorie fortement minimale et ω-catégorique, en utilisant la méthode d'amalgamation de Hrushovski. Nous définissons la classe des *fusions* $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$ (avec une notion de *plongement fort* $\leq$), et dans les Sections 2.1 et 2.2, nous mettons en place les outils de base le travail dans cette classe. En particulier, nous montrons qu'elle a la propriété d'amalgamation, et nous construisons des *fusions riches*.

Puis, dans la Section 2.3, nous donnons une axiomatisation de la théorie des fusions riches T_ω, ainsi obtenant une description des complétions de T_ω et des types. Ensuite, nous montrons (sous une hypothèse supplémentaire) que toute complétion de T_ω est supersimple (Section 2.4). Enfin, dans les Sections 2.5 et 2.6, nous vérifions que les complétions de T_ω ont des propriétés supplémentaires qui ne sont pas vraies dans toute théorie supersimple : chaque complétion T a la wnfcp, et si les théories du départ sont fortement minimales, T a des propriétés de n-amalgamation divers.

D'abord, nous indiquons le contexte dans lequel nous travaillons, et nous fixons quelques notations.

On considère des théories complètes T_1 et T_2, dans des langages $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, respectivement, ayant un réduit commun $T_0 := T_1 \restriction \mathcal{L}_0 = T_2 \restriction \mathcal{L}_0$, où $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. On suppose :

– Pour $i = 1, 2$, la théorie T_i est supersimple de rang SU égal à 1.
– T_0 est fortement minimale, ω-catégorique et modulaire.

Notons que, par 1.3.10, une théorie totalement catégorique est toujours localement modulaire. Pour simplifier l'exposition, on supposera que :

Hypothèses 2.0.1 (Hypothèses sur les langages dans la fusion)**.**
– Pour $i = 0, 1, 2$, la théorie T_i élimine les quanteurs dans le langage $\mathcal{L}_i$, et $\mathcal{L}_i$ ne contient pas de symboles de fonctions.
– $\mathrm{acl}_i(\emptyset)$ est infini pour $i = 1, 2$ (acl_i dénote la clôture algébrique au sens de T_i).
– Les langages $\mathcal{L}_i$ sont dénombrables.

Quitte à passer à des morleyisées et quitte à remplacer les fonctions par leurs graphes, on peut toujours supposer le premier point. Pour satisfaire à la seconde condition, il suffit d'ajouter — au besoin — des constantes aux langages $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. On remarque que $\mathcal{L}_i$ dénombrable devient une condition essentielle quand nous considérons des questions de collapse.

Nous appelons (T_0, T_1, T_2) un *contexte de fusion*, si T_0, T_1 et T_2 satisfont à toutes les hypothèses ci-dessus.

Afin de fusionner (librement) T_1 et T_2 au-dessus de T_0, nous procédons comme dans [Hr92], même si techniquement notre exposition est plus proche de [Po99], car nous travaillons principalement avec des structures qui sont acl_i-closes. Pour $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ on définit $\tilde{\mathcal{C}}$ comme la classe des $\mathcal{L}$-structures $M \models T_1^\forall \cup T_2^\forall$ avec $M = \mathrm{acl}_1(M) = \mathrm{acl}_2(M)$. Comme T_1 et T_2 éliminent les quanteurs, cette définition a un sens.

Par convention, toutes les $\mathcal{L}_i$-formules considérées seront sans quanteurs (c'est à dire chaque $\mathcal{L}_i$-formule qui apparaît est remplacée par une $\mathcal{L}_i$-formule qui lui est équivalente modulo T_i).

Remarque 2.0.2. *Si $M \in \tilde{\mathcal{C}}$, alors $M \models T_0$.*

Preuve. Soit $M \in \tilde{\mathcal{C}}$. Comme M est acl_1-clos (donc infini par 2.0.1), en particulier, M est acl_0-clos et infini. Or, tout ensemble infini algébriquement clos dans une théorie fortement minimale est un modèle (Fait 1.3.19). □

Pour $A \subseteq M \in \tilde{\mathcal{C}}$ on définit $\langle A \rangle$ comme le plus petit sous-ensemble de M contenant A qui est algébriquement clos au sens de T_1 et T_2. D'une manière équivalente, $\langle \cdot \rangle$ correspond à la clôture transitive des opérateurs acl_1 et acl_2. On dit que M est *finiment engendrée* (dans le sens de $\langle \cdot \rangle$), si $M = \langle \bar{b} \rangle$ pour un uplet $\bar{b} \in M$ fini. Soit $\mathcal{C}$ la classe des structures dans $\tilde{\mathcal{C}}$ qui sont finiment engendrées.

Définition 2.0.3. Soient $M \in \tilde{\mathcal{C}}$, $A \subseteq_\omega M$ et $B \subseteq M$.

(1) $\delta(A) := \mathrm{d}_1(A) + \mathrm{d}_2(A) - \mathrm{d}_0(A)$, la *prédimension* de A, où d_i dénote le rang SU au sens de la théorie T_i.

(2) $\delta(A/B) := \mathrm{d}_1(A/B) + \mathrm{d}_2(A/B) - \mathrm{d}_0(A/B)$.

(3) $\tilde{\mathcal{C}}_0 := \{M \in \tilde{\mathcal{C}} \mid \delta(A) \geq 0 \ \forall A \subseteq_\omega M\}$, $\mathcal{C}_0 := \tilde{\mathcal{C}}_0 \cap \mathcal{C}$. Les structures dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ seront appelées *fusions*.

(4) Si $M \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, $\mathrm{d}_M(A) := \min\{\delta(\tilde{A}) \mid A \subseteq \tilde{A} \subseteq_\omega M\}$, la *dimension* de A dans M. De manière analogue, on définit la dimension relative $\mathrm{d}_M(A/B) := \min\{\mathrm{d}_M(AB_0) - \mathrm{d}_M(B_0) \mid B_0 \subseteq_\omega B\}$.

(5) Pour $M \in \mathcal{C}_0$, on pose $\delta(M) := \min\{\delta(A) \mid A \subseteq_\omega M$ et $\langle A \rangle = M\}$. De plus, si M est finiment engendrée au-dessus de $A \subseteq M$, on peut définir $\delta(M/A)$.

(6) Soient $C \subseteq B$ deux sous-ensembles acl_0-clos d'une structure dans $\tilde{\mathcal{C}}$. Alors, on pose $C \leq B$ (C est *autosuffisant* ou *fort* dans B) si pour tout uplet fini $\bar{b}$ de B on a $\delta(\bar{b}/C) \geq 0$.

En général, les fusions sont dénotées par K, L etc., tandis que k, l etc. sont réservées pour des fusions finiment engendrées (i.e. les structures dans $\mathcal{C}_0$). Remarquons que $\delta(A/B) = \delta(AB) - \delta(B)$ si B est fini.

Il est commode d'étendre la notion d'un sous-ensemble autosuffisant aux sous-ensembles arbitraires $C \subseteq B \subseteq K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$. On pose $C \leq B$ ssi $\mathrm{acl}_0(C) \leq \mathrm{acl}_0(B)$. Contrairement au cas où B est acl_0-clos, cette notion peut dépendre du plongement particulier de B dans K.

Par définition, on a $\tilde{\mathcal{C}}_0 = \{M \in \tilde{\mathcal{C}} \mid \emptyset \leq M\}$. Notons également que $\delta(A) = \delta(\mathrm{acl}_0(A))$.

Remarque. *Dans la définition de l'autosuffisance, il est nécessaire de faire appel aux ensembles* acl_0*-clos, si l'on veut obtenir une notion transitive. Si, pour un sous-ensemble arbitraire $C \subseteq B$ on exige uniquement que $\delta(\bar{b}/C)$ soit positif pour tout uplet fini $\bar{b}$ dans B, alors la transitivité peut être violée, même dans des cas très simples (voir l'Exemple 2.0.4, où ne figurent que des théories d'espaces vectoriels).*

Notons que dans l'exemple suivant, comme souvent dans la suite, nous raisonnons dans des langages qui comportent des symboles de fonctions, même si dans notre traitement abstrait les fonctions sont systématiquement remplacées par leurs graphes.

Exemple 2.0.4. Soit $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_2}$ et $T_i = \mathrm{EV}_{F_i}$, où $F_i = \{0, 1, \lambda_i, \lambda_i + 1\} \simeq \mathbb{F}_4$ pour $i = 1, 2$. La multiplication scalaire dans T_i soit dénotée $*_i$ $(i = 1, 2)$. Soit $V_0 \models T_1^\forall \cup T_2^\forall$ la $\mathcal{L}$-structure suivante :

En tant que $\mathcal{L}_0$-structure, V_0 est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension 4, avec base (b_1, b_2, b_3, b_4). On en fait une $\mathcal{L}_i$-structure (un F_i-espace vectoriel de dimension 2), en posant $\lambda_i *_i b_1 := b_2$ et $\lambda_i *_i b_3 := b_4$ pour $i = 1, 2$ (cela suffit pour déterminer toute la $\mathcal{L}$-structure sur V_0). On calcule : $\delta(b_2, b_3/b_1) = \delta(b_3, b_3 - b_2/b_1) = 0$, $\delta(b_3/b_1) = \delta(b_3 - b_2/b_1) = 1$, $\delta(b_2/b_1, b_3, b_3 - b_2) = 0$ et $\delta(b_2/b_1) = -1$. Les inclusions $\{b_1\} \subseteq \{b_1, b_3, b_3 - b_2\} \subseteq \{b_1, b_3, b_3 - b_2, b_2\}$ témoigent donc que $\leq$ ne serait pas transitif dans cet exemple, si dans la définition de $C \leq B$ on exigeait uniquement $\delta(\bar{b}/C) \geq 0$ pour tout uplet fini $\bar{b}$ dans B.

Remarque 2.0.5. *La classe $\tilde{\mathcal{C}}_0$ est élémentaire.*

Preuve. Soient $\varphi_i(\bar{x})$ des $\mathcal{L}_i(\emptyset)$-formules, pour $i = 1, 2$, avec $\mathrm{SU}(\varphi_i(\bar{x})) = m_i$. Pour une telle paire on met l'axiome suivant — une condition définissable car T_0 est ω-categorique :

$$\forall \bar{x}\{[\varphi_1(\bar{x}) \wedge \varphi_2(\bar{x})] \rightarrow [\mathrm{d}_0(\bar{x}) \leq m_1 + m_2]\}.$$

$\square$

Définition 2.0.6. Soit $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ une fusion et $A \subseteq K$. On dit que A *contrôle* K si $\langle A \rangle = K$ et $A \leq K$. Si $B \subseteq K$, on dit que A *contrôle* K *au-dessus de* B si AB contrôle K.

On observe que pour A fini on a $\delta(\langle A \rangle) \leq \delta(A)$, avec égalité si et seulement si $\langle A \rangle$ est contrôlé par A.

2.1 Amalgame libre et un peu de δ-arithmétique

Dans cette section, nous établissons les propriétés élémentaires concernant la prédimension δ et la notion d'autosuffisance qui seront utilisées constamment dans la suite, la plupart du temps sans référence. Il est utile d'introduire plusieurs notions de clôtures (ce que nous faisons), dont chacune aura sa place dans la suite.

Puis, nous montrons l'existence des *amalgames libres* dans $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$, c'est à dire dans la classe des fusions avec les plongements forts comme plongements. En particulier, il s'en suit que $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$ a la propriété d'amalgamation. Quitte à choisir une composante connexe de cette classe, cela permet de construire des structures riches (pour la sous-classe des fusions finiment engendrées $(\mathcal{C}_0, \leq)$), dans la Proposition 2.1.14.

Lemme 2.1.1. *Soit $K \in \tilde{\mathcal{C}}$, contenant tous les ensembles et uplets qui apparaissent dans les énoncés suivants.*

(1) (sous-modularité) Soit $A \subseteq B$. Alors, $\delta(\bar{c}/\operatorname{acl}_0(A\bar{c}) \cap \operatorname{acl}_0(B)) \geq \delta(\bar{c}/B)$. En particulier, si $B \leq C$ et $D \subseteq C$ sont des ensembles acl_0*-clos, alors $D \cap B \leq D$.*

(2) (transitivité) Si $A \leq B$ et $B \leq C$, alors $A \leq C$.

(3) (continuité) Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système filtré de sous-ensembles de C (c'est à dire pour tout $i, j \in I$ il existe $k \in I$ avec $A_i \cup A_j \subseteq A_k$) tel que $A_i \leq C$ pour tout i, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \leq C$.

(4) Soient $A_1, A_2 \leq B$ des sous-ensembles forts et acl_0*-clos de B. Alors $A_1 \cap A_2 \leq B$.*

Si on suppose en outre que $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, alors :

(5) Pour tout $A \subseteq K$ il existe un unique ensemble $\operatorname{cl}_0^K(A)$ qui est minimal parmi les ensembles A' ayant les propriétés suivantes : $A' \supseteq A$, $A' \leq K$ et $A' = \operatorname{acl}_0(A')$. Si A est fini, $\operatorname{cl}_0^K(A)$ est fini aussi. De plus, on a $\mathrm{d}_K(A) = \delta(\operatorname{cl}_0^K(A))$.

(6) Soient $A \subseteq B \subseteq C$ finis. Alors, on a $\mathrm{d}_K(C/A) = \mathrm{d}_K(C/B) + \mathrm{d}_K(B/A)$, $\mathrm{d}_K(B/A) \leq \mathrm{d}_K(C/A)$ et $\mathrm{d}_K(C/A) \geq \mathrm{d}_K(C/B)$.

(7) $\mathrm{d}_K(a/B) \in \{0, 1\}$ pour tout singleton a, et l'opérateur de clôture géométrique *(aussi appelée* d-clôture*) $\operatorname{cl}_{\mathrm{d}}^K(B) := \{a \in K \mid \mathrm{d}_K(a/B) = 0\}$ définit une prégéométrie.*

Preuve. (1) est une conséquence de la modularité de d_0 combinée avec la sous-modularité de d_1 et d_2. Dans (2), par la définition de l'autosuffisance, on peut supposer que A, B et C sont acl_0-clos. Or, $\delta(\bar{c}/A) = \delta(\bar{c}/\operatorname{acl}_0(A\bar{c}) \cap B) + \delta(\operatorname{acl}_0(A\bar{c}) \cap B/A)$ pour tout $\bar{c} \in C$. Le terme à gauche est supérieur où égal à $\delta(\bar{c}/B)$ par (1), et donc les deux termes sont non-négatifs par hypothèse. (3) est facile.

Quant à (4), par transitivité il suffit de voir que $A_1 \cap A_2 \leq A_1$, ce qui est vrai par sous-modularité. Pour montrer (5), on se réduit d'abord au cas où A

est fini. Par (4), l'opérateur $A \mapsto \mathrm{cl}_0^K(A)$ est bien défini pour les ensembles finis, et $\mathrm{cl}_0^K(A)$ est fini : Soit $\delta(A) = n$. Alors, toute chaîne $A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ d'ensembles finis (dans K) avec $\delta(A_{i+1}) < \delta(A_i)$ est de longueur au plus n, puisque $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et donc $\delta(A') \geq 0$ pour tout $A' \subseteq_\omega K$. Cela montre l'existence d'un ensemble acl_0-clos et fini contenant A et fort dans K.

Ensuite, l'opérateur $A \mapsto \mathrm{cl}_0^K(A)$ est monotone là où il est défini. Utilisant la continuité (3), on voit aisément que $\mathrm{cl}_0^K(A) = \bigcup_{A_0 \subseteq_\omega A} \mathrm{cl}_0^K(A_0)$ a la propriété cherchée.

($*$) Si A et B sont finis, alors $\mathrm{d}_K(B/A) = \mathrm{d}_K(AB) - \mathrm{d}_K(A)$.

L'assertion ($*$) donne (6) et le fait que le minimum qui apparaît dans la définition de la dimension relative est une limite. Pour montrer ($*$), on considère $A' \subseteq A$ et on calcule :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_K(AB) &\leq \delta(\mathrm{cl}_0^K(A'B) \cup \mathrm{cl}_0^K(A)) \\ &\leq \delta(\mathrm{cl}_0^K(A'B)) + \delta(\mathrm{cl}_0^K(A)) - \delta(\mathrm{cl}_0^K(A'B) \cap \mathrm{cl}_0^K(A)) \\ &\leq \delta(\mathrm{cl}_0^K(A'B)) + \delta(\mathrm{cl}_0^K(A)) - \mathrm{d}_K(A') = \mathrm{d}_K(A'B) + \mathrm{d}_K(A) - \mathrm{d}_K(A'). \end{aligned}$$

De gauche à droite, les inégalités sont conséquence de : $AB \subseteq \mathrm{cl}_0^K(A'B) \cup \mathrm{cl}_0^K(A)$, sous-modularité, $A' \subseteq \mathrm{cl}_0^K(A'B) \cap \mathrm{cl}_0^K(A)$ et (5).

Finalement, nous prouvons (7). Le caractère fini est clair, tandis que la monotonie et la transitivité de $\mathrm{cl}_{\mathrm{d}}^K$ sont une conséquence de (6). Quant à la propriété d'échange de Steinitz, on la réduit sans problèmes au cas où B est fini.

Comme $\mathrm{d}_K(Ba) \leq \delta(\mathrm{cl}_0^K(B)a) \leq \delta(\mathrm{cl}_0^K(B)) + \delta(a/\mathrm{cl}_0^K(B)) \leq \mathrm{d}_K(B) + 1$, on a $\mathrm{d}_K(a/B) \in \{0, 1\}$. Par (6), $\mathrm{d}_K(a/B) + \mathrm{d}_K(c/Ba) = \mathrm{d}_K(ac/B) = \mathrm{d}_K(c/B) + \mathrm{d}_K(a/Bc)$. Maintenant, si $\mathrm{d}_K(a/B) = 1$ et $\mathrm{d}_K(c/Ba) = 0$, nécessairement $\mathrm{d}_K(a/Bc) = 0$. Cela montre la propriété d'échange de Steinitz. □

Nous introduisons encore un autre opérateur de clôture pour lequel on réserve le terme de clôture autosuffisante.

Définition 2.1.2. Soit K une fusion et $A \subseteq K$. Alors on pose $\mathrm{cl}_\omega^K(A) := \langle \mathrm{cl}_0^K(A) \rangle$, la *clôture autosuffisante* de A (dans K).

Notons que la clôture autosuffisante de A est égale à la plus petite fusion contenant A qui est contenue dans K de manière autosuffisante.

Dans la suite, on écrira d, cl_0 et cl_ω au lieu de d_K, cl_0^K et cl_ω^K, si l'on ne risque pas d'ambiguïté. On observe que $\mathrm{acl}_0(A) \subseteq \mathrm{cl}_0(A) \subseteq \mathrm{cl}_\omega(A) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathrm{d}}(A)$.

Puisque cl_{d} donne lieu à une prégéometrie, il y a une notion de dimension associée. Clairement, cette dimension est égale à la dimension d déjà définie pour les ensembles finis. Nous étendons donc la définition de d, et à partir de maintenant, $\mathrm{d}(A/B)$ dénote la dimension (au sens de la prégéométrie) pour des ensembles A et B arbitraires.

Remarque 2.1.3. *Soient $K \leq L$ des fusions et $A \subseteq K$. Alors,* $\mathrm{d}_K(A) = \mathrm{d}_L(A)$, $\mathrm{cl}_0^K(A) = \mathrm{cl}_0^L(A)$ *et* $\mathrm{cl}_\omega^K(A) = \mathrm{cl}_\omega^L(A)$.

Preuve. Par transitivité de $\leq$ et 2.1.1(4), $\mathrm{cl}_0^K(A) = \mathrm{cl}_0^L(A)$. Le résultat sur cl_ω en découle. Puis, $\mathrm{d}_K(A) = \delta(\mathrm{cl}_0^K(A)) = \delta(\mathrm{cl}_0^L(A)) = \mathrm{d}_L(A)$, par 2.1.1(5). $\square$

Voilà un lemme facile que nous utiliserons très souvent :

Lemme 2.1.4. *Soit $B \leq K$.*

(1) Soit $A \subseteq_\omega K$ avec $\delta(A/B) \leq 0$. Alors, $\delta(A/B) = 0$ et $AB \leq K$.

(2) Pour tout uplet $\overline{a} \in \mathrm{acl}_1(B)$, on a $\mathrm{d}_2(\overline{a}/B) = \mathrm{d}_0(\overline{a}/B)$, $\delta(\overline{a}/B) = 0$ et $B\overline{a} \leq K$. En particulier, $\mathrm{acl}_i(B) \leq K$ pour $i = 1, 2$ et $\langle B \rangle \leq K$.

Preuve. Soit $A \subseteq_\omega K$ avec $\delta(A/B) \leq 0$. Alors, $\delta(A/B) = 0$ suit du fait que $\delta(A'/B) \geq 0$ pour tout $A' \subseteq_\omega K$ par la définition de l'autosuffisance. Puis, soit $C \subseteq_\omega K$ arbitraire. Donc, $0 \leq \delta(AC/B) = \delta(C/AB) + \delta(A/B) = \delta(C/AB)$, d'où $AB \leq K$, et (1) est montré.

La deuxième partie suit de la première, par induction et continuité. Il suffit de noter que pour toute expansion fortement minimale $T \subseteq T'$ et $\overline{a}, B \subseteq M' \models T'$, on a $\mathrm{d}'(\overline{a}/B) \leq \mathrm{d}(\overline{a}/B)$. $\square$

Lemme 2.1.5. *Soit $K \in \tilde{\mathcal{C}}$. Supposons que pour $i = 1, 2$, des $\mathcal{L}_i$-types $p_i(x_I) \in S^I(K)$ soient donnés, avec $p_0 := p_1 \restriction_{\mathcal{L}_0} = p_2 \restriction_{\mathcal{L}_0}$. Alors il existe une extension $L \in \tilde{\mathcal{C}}$ de K et $A \subseteq L$ tel que $A \models p_1 \cup p_2$ et L est contrôlée par A au-dessus de K.*

Preuve. Par le lemme de consistance de Robinson, il existe A avec $KA \models T_1^\forall \cup T_2^\forall$ et $A \models p_1 \cup p_2$.

$(*)$ Pour tout $B \models T_1^\forall \cup T_2^\forall$ il y a un $L \in \tilde{\mathcal{C}}$ contrôlé par B.

Il suffit de montrer $(*)$, ce que nous faisons maintenant.

On choisit des $\mathcal{L}_i$-plongements $\iota_i : B \subseteq M_i \models T_i$ $(i = 1, 2)$, où les M_i sont suffisamment saturés. Quitte à choisir un $\mathcal{L}_0(B)$-isomorphisme de $\mathrm{acl}_0(\iota_1(B))$ avec $\mathrm{acl}_0(\iota_2(B))$, on peut supposer que $B = \mathrm{acl}_0(B)$. Si B n'est pas acl_1-clos, on choisit b' dans M_1 avec $b' \in \mathrm{acl}_1(B) \setminus B$ (nous supposons que les ι_i sont des inclusions). On pose $B' := \mathrm{acl}_0(Bb')$, et on fait de B' un $T_2^\forall$-modèle (une $\mathcal{L}_2$-extension de B) en exigeant que $\mathrm{d}_2(b'/B) = 1$. Pour cela, il suffit de choisir un élément $b'' \in M_2$ avec $b'' \notin \mathrm{acl}_2(B)$; l'application qui envoie b' sur b'' s'étend en un $\mathcal{L}_0(B)$-isomorphisme $B' \simeq B'' := \mathrm{acl}_0(Bb'')$. En utilisant cette application, on peut équiper B' d'une $\mathcal{L}$-structure telle que $B' \models T_1^\forall \cup T_2^\forall$. Tout uplet $\overline{a}$ de B' qui n'est pas entièrement contenu dans B, est interalgébrique (au sens de $\mathcal{L}_0$) au-dessus de B avec b', et donc $\delta(\overline{a}/B) = \delta(b'/B) = 0 + 1 - 1 = 0$. On en déduit que $B \leq B'$.

Maintenant, on continue avec B' au lieu de B. Posons $B_0 := B$ et $B_1 := B'$. Si B_1 n'est pas acl_1-clos, on choisit $b' \in \mathrm{acl}_i(B_1) \setminus B_1$, et comme avant on trouve $B_1 \leq B_2 = \mathrm{acl}_0(B_1 b') \models T_1^\forall \cup T_2^\forall$. Ainsi, prenant la réunion pour les ordinaux limites, on obtient une suite croissante $(B_\beta)_\beta$ de modèles de $T_1^\forall \cup T_2^\forall$, avec $B_\beta \subseteq \mathrm{acl}_1(B)$ pour tout β. Il est clair que cette chaîne s'arrête, et il existe donc α tel que $B_\alpha = \mathrm{acl}_1(B_\alpha)$. Par transitivité et continuité de l'autosuffisance, $B = B_0 \leq B_\alpha$.

Posons $B^1 := B_\alpha$. En échangeant les rôles de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, on obtient, à l'aide d'une deuxième chaîne, une structure $B^1 \leq B^2 \models T_1^\forall \cup T_2^\forall$ telle que $B^2 = \mathrm{acl}_2(B^1)$. On continue en alternant $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ et on obtient donc $B \leq B^1 \leq B^2 \leq \ldots \leq B^n \leq \ldots$ tels que $B^{2m+1} = \mathrm{acl}_1(B^{2m})$ et $B^{2m+2} = \mathrm{acl}_2(B^{2m+1})$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Soit $L := \bigcup_{n<\omega} B^n$. Alors, par construction, on a $L = \langle B \rangle$ et $B \leq L$, c'est à dire L est contrôlée par B. $\square$

Construction d'un amalgame libre dans $\tilde{\mathcal{C}}$

Définition 2.1.6. Soient $K \subseteq L, M$ trois structures dans $\tilde{\mathcal{C}}$ (nous continuons à écrire des inclusions au lieu de plongements). On dit que $N \in \tilde{\mathcal{C}}$ contenant L et M est un *amalgame libre de L et M au-dessus de K* s'il satisfait aux conditions suivantes :

(α) $M \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\nolimits^i_K L$, pour $i = 0, 1, 2$ et

(β) N est contrôlée par ML.

Par abus du langage, on écrit $N = M \otimes_K L$ si N est un amalgame libre de M et L au-dessus de K, même si on n'a pas l'unicité de l'amalgame libre.

Lemme 2.1.7 (Existence d'un amalgame libre)**.** *Dans la classe $\tilde{\mathcal{C}}$, les amalgames libres existent.*

Preuve. Soit $K \subseteq L, M$ trois structures dans $\tilde{\mathcal{C}}$. Notons d'abord que si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\nolimits^i_B C$ pour un $B = \mathrm{acl}_i(B)$, alors $\mathrm{acl}_i(AB) \cap \mathrm{acl}_i(BC) = B$, et donc $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\nolimits^0_B C$ aussi, car T_0 est modulaire.

Pour $i = 1, 2$, on choisit une extension non-déviante $p_i(x_I)$ de $\mathrm{tp}_i(L/K)$ à M. Par le paragraphe précédent, $p_i(x_I) \restriction_{\mathcal{L}_0}$ ne dévie pas au-dessus de K au sens de la théorie T_0, et donc $p_1 \restriction_{\mathcal{L}_0} = p_2 \restriction_{\mathcal{L}_0}$, car $\mathrm{tp}_0(L/K)$ est stationnaire (K étant un modèle de T_0 par 2.0.2).

Pour terminer, il suffit d'appliquer le Lemme 2.1.5 à p_1 et p_2 au-dessus de M. $\square$

En fait, la preuve qu'on vient de donner montre un résultat plus fort :

Remarque 2.1.8. *Soient $K \subseteq L, M$ des structures dans $\tilde{\mathcal{C}}$. On pose $p_i(x_I) := \mathrm{tp}_i(L/K)$. Puis, pour $i = 1, 2$, soit $\tilde{p}_i$ une extension non-déviante de p_i à M. Alors, il y a un amalgame libre $N = L \otimes_K M$ tel que, considérant L et M comme sous-structures de N, on a $\mathrm{tp}_i(L/M) = \tilde{p}_i$ pour $i = 1, 2$.* $\square$

Notation. Soit K une fusion, et $B, A, C \subseteq K$. Alors on pose $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\nolimits^{\mathrm{d}}_B C$ si $\mathrm{d}(A_0/B) = \mathrm{d}(A_0/BC)$ pour tout $A_0 \subseteq_\omega A$, et nous dirons que A et C sont d-*indépendants* au-dessus de B.

Ici, nous utilisons $\mathrm{d} = \mathrm{d}_K$, et nous devrions donc également noter quelque part le fait que $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\nolimits^{\mathrm{d}}$ dépend (a priori) de K. Cependant, si nous passons de K à $K' \geq K$, la signification de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\nolimits^{\mathrm{d}}$ ne change pas, par 2.1.3.

Lemme 2.1.9. *Soient K_1, K_2 deux fusions qui sont fortement plongées dans K. On pose $K_0 := K_1 \cap K_2$ et $L := \langle K_1 K_2 \rangle$. Sont équivalents :*

(1) $K_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{K_0} K_2$

(2) *L est isomorphe à un amalgame libre* $K_1 \otimes_{K_0} K_2$ *et L est autosuffisant dans K.*

(3) $K_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{i}_{K_0} K_2$ *(*$i = 1, 2$*) et* $K_1K_2 \leq K$*.*

Preuve. (2) $\iff$ (3) est facile (on utilise 2.1.4(2)). Pour montrer les autres équivalences, on note d'abord que (1) et (3) sont des énoncés finitaires au-dessus de K_0, dans le sens qu'ils sont vrais si et seulement s'ils sont vrais pour toutes fusions K_i' finiment engendrées au-dessus de K_0 telles que $K_0 \leq K_i' \leq K_i$. On peut donc supposer que K_i/K_0 est finiment engendrée pour $i = 1, 2$. Montrons (3)$\Rightarrow$(1). Les hypothèses dans (3) donnent

$$\mathrm{d}(K_1/K_2) = \delta(K_1/K_2) = \delta(K_1/K_0) = \mathrm{d}(K_1/K_0),$$

d'où (1).

Quant à (1)$\Rightarrow$(2), par $K_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{K_0} K_2$, dans

$$\mathrm{d}(K_1/K_2) \leq \delta(K_1/K_2) \leq \delta(K_1/K_0) = \mathrm{d}(K_1/K_0), \tag{2.1}$$

on a égalité partout (la première inégalité vient de $K_2 \leq K$, et la deuxième inégalité suit de la sous-modularité). De gauche à droite, (2.1) signifie que $K_1K_2 \leq K$ (car $K_2 \leq K$) et $K_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{i}_{K_0} K_2$ pour $i = 1, 2$ (puisque $K_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{0}_{K_0} K_2$ par modularité de T_0). □

Lemme 2.1.10 (Lemme d'amalgamation asymétrique)**.**
Soient $K, L, M \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ *avec* $K \leq L$ *et* $K \subseteq M$*. Alors, M est autosuffisant dans tout amalgame libre* $N := L \otimes_K M$*, et N est dans* $\tilde{\mathcal{C}}_0$*.*

Preuve. Par définition d'un amalgame libre, on a $LM \leq N$. Afin de montrer $M \leq N$, il suffit donc de voir que $M \leq LM$, c.à.d. $\delta(A/M) \geq 0$ pour tout $A \subseteq_\omega \mathrm{acl}_0(LM)$. On se donne un tel ensemble A. Posons $B := \mathrm{acl}_0(AM)$. Le Fait 1.3.4 donne $B = \mathrm{acl}_0((B \cap L)M)$, et A est alors inter-$\mathcal{L}_0$-algébrique au-dessus de M avec un certain $A' \subseteq_\omega L$. D'où $\delta(A/M) = \delta(A'/M)$, ce dernier étant égal à $\delta(A'/K)$, car $M \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{i}_{K} L$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$. Or, $\delta(A'/K)$ est non-négatif par $K \leq L$. Finalement, $N \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, comme $\emptyset \leq M$ et $M \leq N$. □

On combine les Lemme 2.1.7 et 2.1.10 pour obtenir :

Corollaire 2.1.11. *La classe* $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$ *a la propriété d'amalgamation (AP).* □

Remarque 2.1.12. *Si on remplace* $\tilde{\mathcal{C}}_0$ *par la classe des* $\mathcal{L}$*-structures* acl_0*-closes* $M \models T_1^\forall \cup T_2^\forall$ *satisfaisant* $\delta(\overline{a}) \geq 0$ *pour tout* $\overline{a} \in M$ *fini, on peut perdre la propriété d'amalgamation. Il y a même de tels exemples avec* T_1 *et* T_2 *fortement minimales triviales (cf. 3.0.1(1)).*

Définition 2.1.13. On dit que $M \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ est *riche* si pour tout $k \leq l$ dans $\mathcal{C}_0$, et tout plongement fort $k \leq M$ il existe un k-plongement fort de l dans M.

La classe $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$ a la propriété d'amalgamation, et par le Lemme 2.1.10, on peut plonger deux fusions K, L fortement dans une même fusion M ssi on peut établir un $\mathcal{L}$-isomorphisme entre $\langle\emptyset\rangle_K$ et $\langle\emptyset\rangle_L$. Donc, $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$ n'est pas toujours connexe, les composantes connexes étant données par les $\mathcal{L}$-types d'isomorphisme de fusions $\emptyset$-engendrées.

Cela a pour conséquence que deux fusions riches dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ n'ont pas forcément la même théorie élémentaire. Néanmoins, on a le résultat suivant :

Proposition 2.1.14. *Dans chaque composante connexe de $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$, il existe des structures riches, et cela en cardinalité $\leq 2^{\aleph_0}$. Deux fusions riches sont $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalentes ssi elles se trouvent dans la même composante connexe de $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$.*

Preuve. La classe $\mathcal{C}_0$ contient au plus $2^{\aleph_0}$ structures à $\mathcal{L}$-isomorphisme près, de même la classe $\mathcal{C}_0(k_0) := \{k_0 \leq l \mid l \in \mathcal{C}_0\}$ des $\mathcal{L}$-structures dans $\mathcal{C}_0$ au-dessus d'un certain $k_0 \in \mathcal{C}_0$ (à k_0-isomorphisme près). On obtient une fusion riche contenant fortement une fusion $M_0 \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ en utilisant une construction à la Fraïssé-Hrushovski, à l'aide d'une induction transfinie.

Pour $M_0 \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ de cardinalité au plus $2^{\aleph_0}$, on construit $M_0 \leq M_1$ avec les propriétés suivantes :

(1) $M_1 \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et $\mathrm{card}(M_1) \leq 2^{\aleph_0}$,

(2) Pour tout $k \leq l \in \mathcal{C}_0$ et tout plongement fort $\iota : k \overset{\leq}{\hookrightarrow} M_0$ il existe un k-plongement fort de l dans M_1 étendant ι.

On énumère l'ensemble des problèmes d'amalgamation $\iota : k \overset{\leq}{\hookrightarrow} M_0$, $k \in \mathcal{C}_0$ et $k \leq l \in \mathcal{C}_0(k)$ qui apparaissent dans (2), via $(\iota_\beta, k_\beta \leq l_\beta)_{\beta<\alpha}$. Il est facile de voir que $\alpha \leq 2^{\aleph_0}$.

Pour obtenir M_1, nous construisons une chaîne $(N_\beta, \leq)_{\beta<\alpha}$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$, avec $N_0 := M_0$, $\mathrm{card}(N_\beta) \leq 2^{\aleph_0}$ pour tout β et telle que $(\iota_\beta, k_\beta \leq l_\beta)_{\beta<\alpha}$ est résolu au niveau $N_{\beta+1}$, c'est à dire on peut plonger fortement l_β dans $N_{\beta+1}$ au-dessus de $\iota_\beta : k_\beta \overset{\leq}{\hookrightarrow} M_0 \leq N_\beta$.

Si $\lambda < \alpha$ est un ordinal limite, on pose $N_\lambda := \bigcup_{\gamma<\lambda} N_\gamma$, et pour $\beta = \gamma+1 < \alpha$ il suffit de prendre un amalgame libre $N_\beta = N_\gamma \otimes_{k_\gamma} l_\gamma$, par le Corollaire 2.1.11. On pose $M_1 := \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta$.

Pour obtenir une fusion riche M (contenant fortement M_0 et avec $\mathrm{card}(M) \leq 2^{\aleph_0}$), il suffit de répéter cette construction en remplaçant M_0 par M_1. Ainsi, on obtient une chaîne $(M_i, \leq)_{i<\omega}$. Montrons que $M := \bigcup_{i<\omega} M_i$ est riche. Pour cela, il suffit de noter que l'image de tout plongement fort ι d'un $k \in \mathcal{C}_0$ est contenue dans l'un des M_i (car k est finiment engendrée), et tout problème d'amalgamation au-dessus de ι est alors résolu dans M_{i+1}, et a fortiori dans M aussi.

Le fait que deux structures riches de la même composante connexe sont $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalentes est vrai plus ou moins par définition de la richesse. Il suffit de noter que si $k_i = \mathrm{cl}_\omega(k_i) \leq M_i$ (où M_i est riche pour $i = 1, 2$), $f : k_1 \cong k_2$ et $a_1 \in M_1$, alors $k_1 \leq l_1 := \mathrm{cl}_\omega^{M_1}(k_1 a_1) \in \mathcal{C}_0$. Comme M_2 est riche, on trouve donc une copie l_2 de l_1 avec $l_2 \leq M_2$, et telle qu'il existe un isomorphime $\tilde{f} : l_1 \cong l_2$ étendant f. □

Le lemme suivant est rassurant :

Lemme 2.1.15. *Soit M une fusion riche. Alors $M \models T_1 \cup T_2$.*

Preuve. Par symétrie, il suffit de voir que $M \models T_1$. Considérons M comme sous-ensemble (acl_1-clos) de $M_1 \models T_1$, et soit $\varphi(x, \overline{y})$ une $\mathcal{L}_1$-formule et $\overline{b} \in M$ tel que $M_1 \models \exists x \varphi(x, \overline{b})$. Par le test de Tarski, il suffit de trouver $a \in M$ avec $M_1 \models \varphi(a, \overline{b})$ pour pouvoir conclure que $M \preccurlyeq_{\mathcal{L}_1} M_1$.

Posons $k := \mathrm{cl}_\omega^M(\overline{b})$, et choisissons $p_1(x) \in S_{T_1}(k)$ contenant $\varphi(x, \overline{b})$. Si p_1 est réalisé dans $k = \mathrm{acl}_1(k)$, on a rien à faire (car $k \subseteq M$). Sinon, nécessairement $\mathrm{SU}(p_1) = 1$, et a fortiori $p_1 \restriction_{\mathcal{L}_0}$ est le type T_0-générique au-dessus de k. On choisit $p_2(x) \in S_{T_2}(k)$ avec $\mathrm{SU}(p_2) = 1$ (par conséquent, $p_2 \restriction_{\mathcal{L}_0}$ est le type générique, aussi).

On applique le Lemme 2.1.5 à (p_1, p_2) pour obtenir $a' \models p_1 \cup p_2$ avec $ka' \leq \langle ka' \rangle =: l$. Clairement, $k \leq \mathrm{acl}_0(ka') \leq l \in \mathcal{C}_0$. Comme M est riche, on peut k-plonger l (fortement) dans M. L'image a de a' par ce plongement est la solution de $\varphi(x, \overline{b})$ cherchée. $\square$

2.2 Décomposition des extensions finiment engendrées

Dans cette section, nous expliquons comment on peut décomposer des extensions autosuffisantes de structures dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ en des extensions "élémentaires".

Nous travaillons à l'intérieur d'une fusion riche K^*. Les notions cl_0, d etc. seront par rapport à K^*.

Définition 2.2.1. Soit $K \leq L$ une extension dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$, avec $L \leq K^*$. On dit que cette extension est

- *finiment engendrée* si $L = \langle K\overline{a} \rangle$ pour un uplet $\overline{a}$ fini,
- *générique* si $L = \langle Ka \rangle$ pour un singleton a avec $\mathrm{d}(a/K) = 1$,
- *parasite* si elle est finiment engendrée et $\delta(L/K) = 0$,
- *primitive* si elle est parasite, propre et il n'y a pas de $K' \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ tel que $K \subsetneqq K' \subsetneqq L$ et $K' \leq L$.

Lemme 2.2.2. *Soient $K \leq K' \leq K^*$, et $K \leq L \leq K^*$ avec L/K primitive. Alors ou bien $L \subseteq K'$, ou bien $L' := \langle LK' \rangle$ est égale à un amalgame libre $K' \otimes_K L$ (et $L' \leq K^*$).*

Preuve. D'abord, $L \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}_{L \cap K'} K'$ suit de $\mathrm{d}(L/K) = 0$ et $K \subseteq K'$. Si $L \cap K' \supsetneqq K$, alors $L \subseteq K'$, car L/K est primitive. Sinon, on conclut par le Lemme 2.1.9. $\square$

Techniquement, il est pratique de considérer un autre concept de primitivité pour des extensions de sous-ensembles acl_0-clos d'une fusion :

Définition 2.2.3. Soit $B \subseteq A \subseteq K^* \in \tilde{\mathcal{C}}_0$. On dit que l'extension A/B est *première*, si A et B sont acl_0-clos, $\mathrm{d}_0(A/B)$ est fini et ≥ 2, $\delta(A/B) = 0$ et

$\delta(A'/B) > 0$ pour tout ensemble acl_0-clos A' avec $B \subsetneq A' \subsetneq A$ (en particulier $B \leq A$).

Le nombre $\mathrm{d}_0(A/B)$ est appelé la *longueur* de l'extension.

Remarque. *Notre définition exclut les "extensions premières de longueur 1", qui correspondraient aux extensions de la forme* $A := \mathrm{acl}_0(B\alpha)$*, où* α *est dans exactement un des* $\mathrm{acl}_i(B)$*,* $i = 1, 2$*.*

Lemme 2.2.4. *Soit* A/B *une extension première de longueur* n *(au sein de* K^**) et soit* $B \subseteq B' \subseteq K^*$ *avec* B' acl_0*-clos. On pose* $A' := \mathrm{acl}_0(AB')$*. Alors, on a :*

(1) Si $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{B} A$ *pour* $i = 1, 2$*, alors* A'/B' *est première de longueur* n*. En particulier,* $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{B} A$*.*

(2) $\delta(A/B') = \delta(A'/B') \leq 0$*, et on a égalité ssi ou bien* $A \subseteq B'$ *ou bien* A'/B' *est première (de longueur* n*).*

(3) Si $B' = \mathrm{cl}_0(B')$*, alors* $A \subseteq B'$ *ou* A'/B' *est première de longueur* n*.*

Preuve. Pour tout singleton $a \in A \setminus B$, on a $\mathrm{d}_1(a/B) = \mathrm{d}_2(a/B) = 1$, car A/B est première et $n \geq 2$ (par la définition d'une extension première). Donc, si $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{1}_{B} A$, alors $1 = \mathrm{d}_1(a/B') \leq \mathrm{d}_0(a/B')$, et on déduit que $A \cap B' = B$. Enfin, la modularité de T_0 donne $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{B} A$. On termine la preuve de (1) en utilisant le Fait 1.3.4.

Dans (2), $\delta(A'/B') = \delta(A/B') \leq \delta(A/A \cap B')$ par sous-modularité. Par définition d'une extension première, $\delta(A/A \cap B')$ est strictement négatif si $A \cap B'$ est différent de A et de B. Sinon, c'est égal à 0. Donc, si on a l'égalité $\delta(A/B') = 0$, $A \subseteq B'$ ou $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{B} B'$ (par modularité de T_0). Dans le deuxième cas, comme $\mathrm{d}_0(A/B') = \mathrm{d}_0(A/B) = n$ et $\delta(A/B) = 0$, on déduit que $\mathrm{d}_i(A/B') = \mathrm{d}_i(A/B)$ pour $i = 1, 2$ aussi, d'où $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{B} A$. Par (1), l'extension A'/B' est première. Réciproquement, si $A \subseteq B'$, alors trivialement $\delta(A/B') = 0$. De même, A'/B' première implique $\delta(A'/B') = 0$.

Finalement, notons que dans (3), l'hypothèse entraîne $\delta(A/B') \geq 0$, et on peut donc appliquer (2). $\square$

Maintenant, on introduit des filtrations de $\langle\cdot\rangle$ qui seront utilisées dans plusieurs preuves qui marchent par induction. Les opérateurs $\langle\cdot\rangle_1^n, \langle\cdot\rangle_2^n$ et $\langle\cdot\rangle^n$ $(n \in \mathbb{N})$ définissent des filtrations différentes.

Définition 2.2.5. Pour $X \subseteq K^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $\langle X\rangle_1^n$, $\langle X\rangle_2^n$ et $\langle X\rangle^n$ de manière suivante. D'abord, on pose $\langle X\rangle_1^0 := \langle X\rangle_2^0 := \langle X\rangle^0 := \mathrm{acl}_0(X)$.

Inductivement, on définit $\langle X\rangle_i^{m+1} := \mathrm{acl}_i(\langle X\rangle^m)$ pour $i = 1, 2$, et finalement $\langle X\rangle^{m+1} := \mathrm{acl}_0(\langle X\rangle_1^{m+1} \cup \langle X\rangle_2^{m+1})$.

Notons que $\langle X\rangle_2^{m+1} = \mathrm{acl}_2(\langle X\rangle_1^m)$ et $\langle X\rangle_1^{m+1} = \mathrm{acl}_1(\langle X\rangle_2^m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Cela suit de l'identité $\mathrm{acl}_2(\mathrm{acl}_1(X)) = \mathrm{acl}_2(\mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}_1(X)\,\mathrm{acl}_2(X)))$, par induction sur m et symétrie.

De plus, si $X \leq K^*$, alors $\langle X\rangle_i^m$ et $\langle X\rangle^m$ sont forts dans K^* aussi (par 2.1.4).

Lemme 2.2.6. *Soient $B \subseteq A, C$ des ensembles forts dans K^*. Supposons que $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_B C$ et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}_B C$. Alors on a :*

(a) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^i_B C$ pour $i = 1, 2$, et $AC \leq K^*$.

(b) $\langle A\rangle_i^m \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^j_{\langle B\rangle_i^m} \langle C\rangle_i^m$ et $\langle A\rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^j_{\langle B\rangle} \langle C\rangle$, pour $i = 1, 2$, $j = 0, 1, 2$ et tout $m \in \mathbb{N}$.

Preuve. L'argument dans la preuve de 2.1.9 pour montrer (1) $\Rightarrow$ (3) donne (a). Quant à (b), on a évidemment $\langle A\rangle_i^m \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}_{\langle B\rangle_i^m} \langle C\rangle_i^m$ pour tout choix de m et i. Pour établir (b), par induction (sur m), symétrie, continuité et utilisant (a), il suffit de montrer $\mathrm{acl}_1(A) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_{\mathrm{acl}_1(B)} \mathrm{acl}_1(C)$. Or, $\mathrm{acl}_1(A) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^1_{\mathrm{acl}_1(B)} \mathrm{acl}_1(C)$ est une conséquence de $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^1_B C$, et on en déduit $\mathrm{acl}_1(A) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_{\mathrm{acl}_1(B)} \mathrm{acl}_1(C)$, par modularité de T_0. $\square$

Considérons une extension générique L/K avec $L = \langle Kg\rangle \leq K^*$. Supposons que $\overline{a} \in L$ avec $\mathrm{d}(\overline{a}/K) = 0$. Alors, $g \notin \mathrm{cl}_0(K\overline{a})$, car $\mathrm{d}(g/K) = 1$. L'hypothèse $\mathrm{cl}_0(K\overline{a}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}_K \mathrm{acl}_0(Kg)$ étant trivialement satisfaite, on déduit donc de 2.2.6(b) que $\mathrm{cl}_0(K\overline{a}) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_K L$, et en particulier que $\overline{a} \in K$. Cela montre

Corollaire 2.2.7. *Soit L/K une extension générique et $c \in L \setminus K$. Alors, $\mathrm{d}(c/K) = 1$.* $\square$

Lemme 2.2.8. *Soit $B \subseteq A \subseteq K^*$, avec A/B première. Si $A \subseteq \mathrm{cl}_\omega(D)$ pour un $D \supseteq B$, alors $A \subseteq \mathrm{cl}_0(D)$.*

Preuve. En utilisant le Lemme 2.2.4(3), on se ramène au cas où $B = \mathrm{cl}_0(B) \subseteq D = \mathrm{cl}_0(D)$.

Soit m minimal tel que $A \subseteq \langle D\rangle_i^m$ pour un i. On peut supposer que c'est le cas pour $i = 1$. Si $m \geq 1$, le Lemme 2.2.4 oblige A'/B' à être première, où $B' := \langle D\rangle_2^{m-1}$ et $A' := \mathrm{acl}_0(AB')$, comme $B' = \mathrm{cl}_0(B')$. Aucun $a \in A' \setminus B'$ n'est $\mathcal{L}_i$-algébrique au-dessus de B', pour $i = 1$ ou 2, car A'/B' est première. Cela contredit le fait que $\langle D\rangle_1^m = \mathrm{acl}_1(B')$. Donc, nécessairement $m = 0$. $\square$

Proposition 2.2.9. *Pour toute extension parasite $K \leq L$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ on a :*

(1) Il y a une décomposition finie $K = K_0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_n = L$ telle que K_{i+1}/K_i est une extension primitive pour tout i.

(2) Pour toute autre décomposition $K = K'_0 \leq K'_1 \leq \ldots \leq K'_{n'} = L$ en extensions primitives on a $n = n'$.

Preuve. On peut supposer que $L \leq K^*$. Pour montrer l'existence (1), on choisit d'abord un uplet fini $\overline{a}$ contrôlant L au-dessus de K. Puis, on choisit $K \subseteq A_1 \subseteq \mathrm{acl}_0(K\overline{a})$ minimal avec $K \subsetneq A_1$ et $A_1 = \mathrm{cl}_0(A_1)$. Comme $\mathrm{d}_0(\overline{a}/K)$ est fini, un tel A_1 existe toujours (si $K \neq L$). Par minimalité, A_1/K est première. Posons $K_1 := \langle A_1\rangle$.

Lemme 2.2.10. *Soit $K \leq A_1 \leq K^*$ avec $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et A_1/K première. Alors, $\langle A_1\rangle/K$ est une extension primitive.*

Preuve du lemme. Soit $K_1 := \langle A_1 \rangle$. On doit montrer que $\mathrm{cl}_\omega(K\alpha) = K_1$ pour tout $\alpha \in K_1 \setminus K$. Comme A_1/K est une extension première, cela est évident pour $\alpha \in A_1$, car on a alors $\mathrm{cl}_0(K\alpha) = A_1$. Supposons que $A_1 \subseteq A_2 = \mathrm{cl}_0(A_2)$ et $\mathrm{cl}_\omega(K\alpha') = K_1$ pour tout $\alpha' \in A_2 \setminus K$. Soit $\alpha \in \mathrm{acl}_i(A_2) \setminus A_2$. Alors, $\mathrm{cl}_0(K\alpha) \subseteq \mathrm{acl}_0(A_2\alpha) = \mathrm{cl}_0(A_2\alpha)$. Or, puisque T_0 est modulaire,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_0(A_2/K) + 1 &= \mathrm{d}_0(A_2\alpha/K)\\ &= \mathrm{d}_0(A_2/K) + \mathrm{d}_0(\mathrm{cl}_0(K\alpha)/K) - \mathrm{d}_0(\mathrm{cl}_0(K\alpha) \cap A_2/K).\end{aligned}$$

Comme $0 = \mathrm{d}(\alpha/K) < \delta(\alpha/K) = 1$, on a $\mathrm{d}_0(\mathrm{cl}_0(K\alpha)/K) \geq 2$. En combinant les deux, on voit qu'il existe $\alpha' \in \mathrm{cl}_0(K\alpha) \cap (A_2 \setminus K)$. Donc, $\mathrm{cl}_\omega(K\alpha) = K_1$, car $\mathrm{cl}_\omega(K\alpha') = K_1$ par hypothèse. Tout élément α de K_1 peut être atteint en ajoutant un nombre fini d'éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_m = \alpha$ avec $\alpha_{j+1} \in \mathrm{acl}_i(A_1\alpha_1 \ldots \alpha_j)$, et on termine donc la preuve par induction. □

Continuation de la preuve de la Proposition 2.2.9. On vérifie sans difficulté que L est contrôlée par $\overline{a}$ au-dessus de K_1. La Proposition 2.2.9(1) s'obtient donc par induction sur $\mathrm{d}_0(\overline{a}/K)$, comme $\mathrm{d}_0(\overline{a}/K_1) < \mathrm{d}_0(\overline{a}/K)$.

Nous pourrions donner une preuve directe pour (2), mais nous préférons la reporter à la Section 2.4, car on disposera alors d'un argument plus élégant. □

Corollaire 2.2.11 (Lemme de décomposition)**.** *Soit $K \leq L$ une extension finiment engendrée (avec $L \leq K^*$) telle que $\mathrm{d}(L/K) = d$. Alors, il y a une décomposition $K = K_0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_{d+n} = L$, où K_i/K_{i-1} est générique pour $i \leq d$ et primitive pour $i > d$.*

Preuve. On choisit d'abord une d-base $a_1, \ldots, a_d$ de L au-dessus de K, et on pose $K_i := \langle K_{i-1}a_i \rangle$. Comme $K_d \leq L$ est parasite, on conclut par la Proposition 2.2.9. □

On finit la section avec quelques lemmes supplémentaires.

Lemme 2.2.12. *Soit k une fusion fortement plongée dans une fusion finiment engendrée. Alors, k est finiment engendrée aussi.*

Plus généralement, si $K \leq L' \leq L \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ avec L/K finiment engendrée, alors L'/K est finiment engendrée aussi.

Preuve. Soit $k \leq l$ avec l finiment engendrée. En particulier, $\mathrm{d}(k) \leq \mathrm{d}(l)$, et ces deux dimensions sont finies. On choisit $B = \mathrm{cl}_0(B) \subseteq_\omega k$ fini avec $\mathrm{d}(k/B) = 0$. Puis, comme l est finiment engendrée, on peut choisir $B \subseteq A = \mathrm{cl}_0(A) \subseteq_\omega l$ tel que A contrôle l.

Posons $B' := A \cap k$. Alors, $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{0}_{B'} k$ par construction, de même $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}_{B'} k$, car $\mathrm{d}(k/B) = 0$ et $B \subseteq B'$. Il suffit d'appliquer 2.2.6(b) pour obtenir $\langle A \rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{0}_{\langle B' \rangle} \langle k \rangle$, en d'autres termes $l \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{0}_{\langle B' \rangle} k$. Donc, $k = \langle B' \rangle$ est finiment engendrée.

La preuve concernant $K \leq L' \leq L$ est similaire. □

Lemme 2.2.13. *Soit K une fusion, $K \subseteq A, B \subseteq K^*$. On suppose que $A = \mathrm{cl}_0(A)$, $B = \mathrm{cl}_0(B)$, $\delta(B/A) = 0$ et $[\mathrm{acl}_1(B) \cup \mathrm{acl}_2(B)] \cap A = K$. Alors $\langle B \rangle \cap A = K$.*

Preuve. Posons $B' := \mathrm{acl}_1(B)$. Par symétrie, raisonnant par induction, il suffit de montrer que $\mathrm{acl}_2(B') \cap A = K$. On a $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0_K A$ par hypothèse, donc $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^0_B A$. Comme A est fort et $\delta(B/A) = 0$, nécessairement $AB \leq K^*$, aussi. Cela donne $\delta(B'_0/AB) = \delta(B'_0/B) = 0$ pour tout $B'_0 \subseteq_\omega B'$, et alors $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^2_B A$. On en déduit que $\mathrm{acl}_2(B') \cap A \subseteq \mathrm{acl}_2(B) \cap A = K$. $\square$

Lemme 2.2.14. *Soit L/K une extension primitive. Alors, il y a un unique ensemble minimal $A = \mathrm{cl}_0(A) \supset K$ contrôlant L/K. L'extension A/K est première, et on appelle* longueur *de L/K la longueur de A/K.*

Preuve. Notons que si $K \subseteq A'$, alors L est contrôlé par A' si et seulement si $A' \supsetneq K$ et $\delta(A'/K) = 0$, par primitivité de L/K (en particulier, $\mathrm{d}_0(A'/K) \geq 2$ pour un tel A', puisque $K = \mathrm{acl}_i(K)$ pour $i = 1, 2$). On considère $A = \mathrm{cl}_0(A)$ et $B = \mathrm{cl}_0(B)$, où $K \subseteq A, B$ sont tels que et A et B contrôlent L. Supposons que A est minimal pour cette propriété. On applique le Lemme 2.2.13 pour trouver un élément $b \in \mathrm{acl}_i(B) \cap A$, $b \notin K$ (pour $i = 1$ ou $i = 2$). Puisque $A = \mathrm{cl}_0(Kb)$ par minimalité de A, on en déduit que $A \subseteq \mathrm{acl}_0(Bb) = \mathrm{cl}_0(Bb)$. Comme T_0 est modulaire, et par le fait que $d_0(A/K)$ et $d_0(B/K)$ valent au moins 2, on a $A \cap B \supsetneq K$, d'où $A \subseteq B$ par minimalité de A. $\square$

2.3 Axiomatisation

Soit T_ω la $\mathcal{L}$-théorie (en général incomplète) des fusions riches, toujours par rapport à un contexte de fusion (T_0, T_1, T_2) donné au début du Chapitre 2. Dans cette section, nous étudions des questions de définissabilité et d'uniformité concernant l'autosuffisance et les autres notions jusqu'alors introduites. Nous verrons que le fait d'être riche est significatif modèle-théoriquement, puisque tout modèle $\aleph_1$-saturé de T_ω est riche et, réciproquement, toute fusion riche est un modèle ω-saturé de T_ω. Cela est le contenu du Théorème 2.3.14. En particulier, on en déduit une description des complétions de T_ω et des $\mathcal{L}$-types.

On rappelle le Fait 1.1.7, à savoir que le rang SU est définissable dans toute théorie simple de rang SU égal à 1.

Définition 2.3.1. Soit T une théorie simple de rang SU égal à 1 et soit $p = \mathrm{tp}(\overline{a}/B) \in S(B)$ un type donné, $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$. Pour $I, J \subseteq \mathbf{n}$ on pose $k_{I/J} := \mathrm{SU}(a_I/a_J B)$.

Soit $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$ une formule telle que $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ soit dans p. On dit que $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$ est *rang-complète par rapport à p* si les conditions suivantes sont satisfaites :

– Si $\varphi(\overline{x}, \overline{b}') \neq \emptyset$, alors $\mathrm{SU}(\varphi(\overline{x}, \overline{b}')) = \mathrm{SU}(\overline{a}/B)$.

– $\models \varphi(\overline{a}', \overline{b}')$ implique $\mathrm{SU}(\overline{a}'_I/\overline{a}'_J \overline{b}') \leq k_{I/J}$ pour tout $I, J \subseteq \mathbf{n}$.

Notons que si $\models \varphi(a', \overline{b}')$ et $\mathrm{SU}(\overline{a}'/\overline{b}') = \mathrm{SU}(\overline{a}/\overline{b})$, alors $\mathrm{SU}(\overline{a}'_I/\overline{a}'_J \overline{b}') = k_{I/J}$ pour tout $I, J \subseteq \mathbf{n}$.

La formule $\varphi(\overline{x},\overline{z})$ est dite *rang-complète* s'il existe $\overline{b}$ et un type p tel que $\varphi(\overline{x},\overline{b})$ soit rang-complète par rapport à p.

La preuve du lemme suivant est facile, et nous l'omettons.

Lemme 2.3.2. *Soit T une théorie simple de rang* SU *égal à 1 et $p = \mathrm{tp}(\overline{a}/B) \in S(B)$ un type donné. Alors, p contient une formule $\varphi(\overline{x},\overline{b})$ telle que $\varphi(\overline{x},\overline{z})$ soit rang-complète par rapport à p. Plus précisément, ces formules sont cofinales dans p.* □

Notons que, par définition, si $\varphi(\overline{x},\overline{b})$ est rang-complète par rapport à $p \in S(\overline{b})$, alors p est générique dans $\varphi(\overline{x},\overline{b})$.

Lemme 2.3.3. *Soit $\overline{a}/\overline{b}$ une extension première et $\varphi_0(\overline{x},\overline{z})$ une $\mathcal{L}_0$-formule isolant $\mathrm{tp}_0(\overline{a},\overline{b})$. Puis, pour $i = 1, 2$, soient $\varphi_i(\overline{x},\overline{z})$ des $\mathcal{L}_i$-formules rang-complètes telles que $\mathrm{tp}_i(\overline{a}/\overline{b})$ soit générique dans $\varphi_i(\overline{x},\overline{b})$.*

Alors, pour tout $\overline{a}', \overline{b}' \in K' \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ avec $K' \models \bigwedge_{i=0}^{2} \varphi_i(\overline{a}',\overline{b}')$ on a

- *ou bien $\overline{a}' \in \mathrm{cl}_0^{K'}(\overline{b}')$,*
- *ou bien $\overline{a}'/\overline{b}'$ est une extension première. (Dans ce cas, $\overline{a}'$ est générique dans $\varphi_i(\overline{x},\overline{b}')$ pour $i = 1$ et $i = 2$.)*

En particulier, pour tout ensemble $\tilde{B}' \supseteq \overline{b}'$ on a $\delta(\overline{a}'/\tilde{B}') \leq 0$.

Preuve. Comme $\overline{a}/\overline{b}$ est première et les φ_i sont rang-complètes, pour tout $\overline{b}' \subsetneq \overline{a}'_1 \subsetneq \overline{a}'$ on a $\delta(\overline{a}'/\overline{a}'_1) < 0$. On rappelle que $\overline{b}'$, ayant le même $\mathcal{L}_0$-type que $\overline{b}$, énumère un ensemble acl_0-clos (c'est pareil pour $\overline{a}'$).

Donc, si $\overline{a}' \cap \mathrm{cl}_0(\overline{b}') \supsetneq \overline{b}'$, alors $\overline{a}' \subseteq \mathrm{cl}_0(\overline{b}')$. Par contre, si $\overline{a}' \cap \mathrm{cl}_0(\overline{b}') = \overline{b}'$, alors $\overline{b}' = \mathrm{cl}_0^{K'}(\overline{b}') \cap \overline{a}' \leq \overline{a}'$ par 2.1.1(1), et donc nécessairement $\delta(\overline{a}'/\overline{b}') = 0$. On en déduit que $\overline{a}'/\overline{b}'$ est une extension première et l'uplet $\overline{a}'$ est $\mathcal{L}_i$-générique dans $\varphi_i(\overline{x},\overline{b}')$ pour $i = 1, 2$ (on fait un δ-calcul).

La dernière partie suit directement du Lemme 2.2.4(2). □

Définition 2.3.4. Soit $\tau(\overline{x}) = \exists\overline{y}\varphi(\overline{x},\overline{y})$ une $\mathcal{L}$-formule existentielle (avec φ sans quanteurs). On dit que τ est *à quantification bornée* , si $K \models \varphi(\overline{a},\overline{b})$ implique $\overline{b} \in \mathrm{cl}_\omega^K(\overline{a})$ pour tout $\overline{a},\overline{b} \in K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$.

Lemme 2.3.5. *Soit $B \subseteq K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, et soient $\overline{\alpha}_0 \in \mathrm{cl}_0^K(B)$, $\overline{\alpha}_\omega \in \mathrm{cl}_\omega^K(B)$ et $\overline{\alpha}_{\mathrm{d}} \in \mathrm{cl}_{\mathrm{d}}^K(B)$.*

(1) Il existe $\overline{b} \in B$ et $\overline{a} \in \mathrm{cl}_0^K(B)$ ($\overline{a}$ contenant $\overline{b}\overline{\alpha}_0$) et une $\mathcal{L}$-formule sans quanteurs $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ avec $\models \varphi(\overline{a},\overline{b})$ telle que pour toute fusion K' et tout $\overline{b}', \overline{a}' \in K'$, si $\models \varphi(\overline{a}',\overline{b}')$, alors $\overline{a}' \in \mathrm{cl}_0^{K'}(\overline{b}')$ et $\delta(\overline{a}'/\overline{b}') \leq \delta(\overline{a}/\overline{b})$.

(2) Même énoncé que dans (1), en remplaçant $\overline{\alpha}_0$ par $\overline{\alpha}_\omega$ et cl_0 par cl_ω.

(3) Il existe $\overline{b} \in B$, $\overline{a} \in \mathrm{cl}_\omega^K(\overline{b}\overline{\alpha}_{\mathrm{d}})$ (contenant $\overline{b}\overline{\alpha}_{\mathrm{d}}$) et une $\mathcal{L}$-formule sans quanteurs $\varphi(\overline{x},\overline{x}_{\mathrm{d}},\overline{y})$ avec $K \models \varphi(\overline{a},\overline{\alpha}_{\mathrm{d}},\overline{b})$ telle que pour tout $\overline{b}', \overline{\alpha}'_{\mathrm{d}}, \overline{a}' \in K'$ avec $K' \models \varphi(\overline{a}',\overline{\alpha}'_{\mathrm{d}},\overline{b}')$ on a $\overline{a}' \in \mathrm{cl}_{\mathrm{d}}^{K'}(\overline{b}') \cap \mathrm{cl}_\omega^{K'}(\overline{b}'\overline{\alpha}'_{\mathrm{d}})$.

Soit maintenant e un entier ≥ 0, $B \subseteq K$ et $\overline{\alpha} \in K$. Alors :

(4) Si $\mathrm{d}_K(\overline{\alpha}/B) \leq e$*, il existe* $\overline{b} \in B$ *et une* $\mathcal{L}$*-formule existentielle à quantification bornée* $\tau_{\mathrm{d}}(\overline{x}, \overline{y})$ *telle que* $K \models \tau_{\mathrm{d}}(\overline{\alpha}, \overline{b})$ *et si* $K' \models \tau_{\mathrm{d}}(\overline{\alpha}', \overline{b}')$ *pour* $\overline{\alpha}' \in K' \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ *et* $\overline{b}' \in K'$*, alors* $\mathrm{d}_{K'}(\overline{\alpha}'/\overline{b}') \leq e$*.*

Preuve. Dans la preuve, on peut supposer que $B = \mathrm{acl}_0(B)$.

(1) Comme $\mathrm{cl}_0^K(B)$ est la réunion des $\mathrm{cl}_0^K(B_0)$ pour $B_0 \subseteq_\omega B$, il existe $\overline{b} \in B$ énumérant un ensemble acl_0-clos tel que $\overline{\alpha}_0 \in \mathrm{cl}_0^K(\overline{b})$. On considère une énumération (finie) $\overline{a}$ de $\mathrm{cl}_0^K(\overline{b})$, et on choisit, pour $i = 1, 2$, une formule $\varphi_i(\overline{x}, \overline{z})$ rang-complète par rapport à $\mathrm{tp}_i(\overline{a}/\overline{b})$ (en particulier, $\models \varphi_i(\overline{a}, \overline{b})$). On les choisit telles que $\varphi_i(\overline{x}, \overline{y}) \vdash \mathrm{tp}_0(\overline{a}, \overline{b})$ ce qui est possible par le Lemme 2.3.2. Soient $k^i_{I/J}$ les entiers associés à φ_i et $I, J \subseteq \mathbf{n}$ (avec les notations de 2.3.1, où $\overline{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$). On pose $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) := \varphi_1(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \varphi_2(\overline{x}, \overline{y})$.

Maintenant, soient $\overline{a}', \overline{b}' \in K'$ tels que $\models \varphi(\overline{a}', \overline{b}')$. Prenons $I \subseteq \mathbf{n}$ avec $\overline{a}' \notin \mathrm{acl}_0(\overline{a}'_I \overline{b}')$. Comme $\overline{a}_I \overline{b} \not\leq \overline{a}$ — on rappelle que $\overline{a}$ énumère $\mathrm{cl}_0^K(\overline{b})$ — on a $0 > \delta(\overline{a}/\overline{a}_I \overline{b}) = k^1_{\mathbf{n}/I} + k^2_{\mathbf{n}/I} - \mathrm{d}_0(\overline{a}/\overline{a}_I \overline{b})$. Or, $\mathrm{d}_0(\overline{a}'/\overline{a}'_I \overline{b}') = \mathrm{d}_0(a/\overline{a}_I \overline{b})$ (ils ont le même $\mathcal{L}_0$-type) et $\mathrm{d}_i(\overline{a}'/\overline{a}'_I \overline{b}') \leq k^i_{\mathbf{n}/I}$ pour $i = 1, 2$, car φ_i est rang-complète. Cela donne $\delta(\overline{a}'/\overline{a}'_I \overline{b}') < 0$. On a donc $\overline{a}' \in \mathrm{cl}_0^{K'}(\overline{b}')$, par sous-modularité, et (1) est montré.

Quant à (2), il suffit d'expliciter une cascade d'algébricités au sens de $\mathcal{L}_1$ et de $\mathcal{L}_2$ dans l'uplet $\overline{a}$ en question (on utilise (1) et le fait que $\mathrm{cl}_\omega(X) = \langle \mathrm{cl}_0(X) \rangle$). C'est facile et on omet les détails.

Montrons (3). On décompose l'extension parasite $k = \mathrm{cl}_\omega^K(B) \leq \mathrm{cl}_\omega^K(B\overline{\alpha}_{\mathrm{d}}) = l$ en primitives ($k = l_0 \leq l_1 \leq \ldots \leq l_n = l$). On se sert constamment de (2) pour pouvoir utiliser explicitement des éléments se trouvant dans la clôture autosuffisante cl_ω.

Traitons le cas $n = 1$, où l/k est une extension primitive. (Si $n > 1$, on raisonne par induction.) Soit $k \leq A \leq l$ comme dans le Lemme 2.2.14, c.à.d. A/k est une extension première, A contrôlant l. On choisit une $\mathcal{L}_0$-base $\overline{a}_1$ de A/k, puis on choisit $\tilde{b} = \mathrm{acl}_0(\tilde{b}) \subseteq k$ et $\overline{b} \in B$ avec les propriétés suivantes :

(i) $\overline{a}_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\bot}^i_{\tilde{b}} k$ pour tout i,

(ii) $\overline{\alpha}_{\mathrm{d}} \in \mathrm{cl}_\omega(\tilde{b}\overline{a}_1)$.

(iii) $\tilde{b} \in \mathrm{cl}_\omega(\overline{b})$.

Alors, posant $\tilde{a} := \mathrm{acl}_0(\tilde{b}\overline{a}_1)$, on voit facilement que $\tilde{a}/\tilde{b}$ est une extension première. Soit $\overline{a} := \tilde{a}\overline{\alpha}_{\mathrm{d}}$. On utilise (2) pour pouvoir se servir de $\tilde{b}$ et pour expliciter toutes les autres cl_ω-dépendances, et le Lemme 2.3.3 garantit qu'on peut trouver une formule $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$ comme requise.

Finalement, sous les hypothèses de (4), on choisit un sous-uplet $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_e})$ de $\overline{\alpha}$ de manière que $\overline{\alpha} \in \mathrm{cl}_{\mathrm{d}}(B\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_e})$. Puis, on applique (3) à l'ensemble $B\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_e}$ et l'uplet $\overline{\alpha}$. □

Lemme 2.3.6 (Définissabilité de l'autosuffisance)**.** *Il existe un* $\mathcal{L}$*-type partiel et universel* $\Pi(y_0, \ldots, y_{n-1})$ *tel que pour toute fusion* $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ *et tout uplet* $\overline{b} = (b_0, \ldots, b_{n-1}) \in K$ *on ait* $K \models \Pi(\overline{b})$ *si et seulement si* $\overline{b} \leq K$*.*

Preuve. Soit $\overline{b} \in K$ avec $\overline{b} \not\leq K$, et supposons que $\overline{a}$ énumère $\mathrm{cl}_0^K(\overline{b})$. Par (la preuve de) 2.3.5(1), il existe une $\mathcal{L}$-formule sans quanteurs $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ satisfaite par $(\overline{a}, \overline{b})$ telle que pour tout $\overline{a}', \overline{b}' \in K'$ avec $\models \varphi(\overline{a}', \overline{b}')$ on a $\delta(\overline{a}'/\overline{b}') \leq \delta(\overline{a}/\overline{b}) < 0$. En particulier, si $K' \models \exists \overline{x} \varphi(\overline{x}, \overline{b}')$, alors $\overline{b}' \not\leq K'$.

Il suffit de mettre dans $\Pi(\overline{y})$ toutes les formules de la forme $\forall \overline{x} \neg \varphi(\overline{x}, \overline{y})$, où $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ est comme ci-dessus. □

Définition 2.3.7. Soit $k, l \in \mathcal{C}_0$ avec $k \leq l$. On suppose qu'il y a des ensembles finis et acl_0-clos $B \leq A$ tels que B contrôle k et A contrôle l. On demande que $A \downarrow^i_B k$ pour $i = 0, 1, 2$. Une telle paire A/B est appelée *paire de contrôle* pour l'extension $k \leq l$. Si $\mathrm{d}(A/B) = e = \mathrm{d}(l/k)$, on dit que A/B est une paire de contrôle *de dimension* e.

Remarque 2.3.8. *Si A/B est une paire de contrôle (pour une extension l/k), alors B est relativement* acl_i*-clos dans A pour $i = 0, 1, 2$.*

Preuve. On a $A \cap \mathrm{acl}_i(B) \subseteq A \cap k = B$, comme $B = \mathrm{acl}_0(B)$ et $A \downarrow^0_B k$. □

Lemme 2.3.9. *Soit $k \leq l$ une extension dans $\mathcal{C}_0$ et $\Lambda \subseteq_\omega l$. Alors, il existe une paire de contrôle A/B pour l/k avec $\Lambda \subseteq A$.*

Preuve. Comme l est finiment engendrée, quitte à agrandir Λ, on peut supposer que $\langle \Lambda \rangle = l$. Posons $A_1 := \mathrm{cl}_0(k\Lambda)$, et choisissons $\Lambda \subseteq A_0 \subseteq_\omega A_1$ avec $\mathrm{acl}_0(A_0 k) = A_1$. Puis, on choisit $B = \mathrm{cl}_0(B) \subseteq_\omega k$ contrôlant k et satisfaisant $A_0 \downarrow^i_B k$ pour $i = 0, 1, 2$. Finalement, on pose $A := \mathrm{acl}_0(BA_0)$. On vérifie que A/B est une paire de contrôle pour l/k. □

Pour pouvoir axiomatiser la théorie T_ω, il nous faudra étudier des familles de paires de contrôle. Considérons $B \leq A$, une paire de contrôle pour $k \leq l$. On énumère B avec $\overline{b}$ et $A \setminus B$ avec $\overline{a}$, et on pose $\overline{b}_0 := \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_0(\overline{a}/k))$, où $\mathrm{Cb}(\cdot)$ dénote la *base canonique* d'un type. Comme $\overline{a} \downarrow^0_{\overline{b}} k$, $\overline{b}_0 \in \mathrm{acl}_0^{eq}(\overline{b})$. Par ailleurs, $\overline{b}_0 \in \mathrm{dcl}_0^{eq}(k)$. Soit $\psi_0(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0)$ une $\mathcal{L}_0$-formule isolant $\mathrm{tp}_0(\overline{a}, \overline{b}, \overline{b}_0)$.

Par définissabilité du rang SU dans T_i, il existe des $\mathcal{L}_i$-formules $\psi_i(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0)$ pour $i = 1, 2$, satisfaisant :

PC(i) $\models \psi_1(\overline{a}, \overline{b}, \overline{b}_0) \wedge \psi_2(\overline{a}, \overline{b}, \overline{b}_0)$.

PC(ii) $T_i \vdash \psi_i \rightarrow \psi_0$ pour $i = 1, 2$.

PC(iii) La formule $\varphi_i(\overline{x}, \overline{z}) := \exists \overline{z}_0 \psi_i(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0)$ est une formule rang-complète par rapport à $\mathrm{tp}_i(\overline{a}/\overline{b})$ pour $i = 1, 2$.

PC(iv) Pour tout $\overline{b}', \overline{b}_0'$, et $i = 1, 2$, $\mathrm{SU}(\psi_i(\overline{x}, \overline{b}', \overline{b}_0')) = \mathrm{SU}(\varphi_i(\overline{x}, \overline{b}'))$.

Définition 2.3.10. Soit $\Psi := (\psi_1, \psi_2)$ une paire de formules. On dit que Ψ est une *famille de paires de contrôle (de dimension e)* s'il existe une paire de contrôle A/B de dimension e (pour une extension l/k dans $\mathcal{C}_0$), telle que Ψ satisfasse aux conditions **PC**(i-iv) données ci-dessus. Gardant les mêmes notations, pour une telle famille, on pose $\theta_\Psi(\overline{z}, \overline{z}_0) := \exists \overline{x} \psi_1(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0) \wedge \exists \overline{x} \psi_2(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0)$.

Lemme 2.3.11. *Soit $k \leq l \in \mathcal{C}_0$. Alors* $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(l/k)$ *est impliqué par l'ensemble des $\psi_1(\overline{x}, \overline{b}, \overline{b}_0) \wedge \psi_2(\overline{x}, \overline{b}, \overline{b}_0)$, où $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ est une famille de paires de contrôle, $\overline{a} \in l$, $\overline{b} \in k$, $\overline{b}_0 \in \mathrm{dcl}_0^{eq}(k) \cap \mathrm{acl}_0^{eq}(\overline{b})$ et $\overline{a}\overline{b}/\overline{b}$ une paire de contrôle de l/k avec $\models \psi_1(\overline{a}, \overline{b}, \overline{b}_0) \wedge \psi_2(\overline{a}, \overline{b}, \overline{b}_0)$.*

Preuve. C'est essentiellement le Lemme 2.3.9, combiné avec le fait que les formules rang-complètes sont cofinales dans $\mathrm{tp}_i(\overline{a}/\overline{b})$ pour $i = 1, 2$. $\square$

Lemme 2.3.12. *Soit $\Psi = (\psi_1(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0), \psi_2(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0))$ une famille de paires de contrôle de dimension e, et soit $\overline{b}' \in k' \in \mathcal{C}_0$, $\overline{b}'_0 \in \mathrm{dcl}_0^{eq}(k')$, $\overline{b}'$ contrôlant k', tels que $\models \theta_\Psi(\overline{b}', \overline{b}'_0)$. Alors :*

(1) Soit $k' \subseteq L \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et $\overline{a}' \in L$ une solution générique de $\psi_i(\overline{x}, \overline{b}', \overline{b}'_0)$ au-dessus de k' pour $i = 1$ et $i = 2$. Supposons de plus que $k'\overline{a}' \leq \langle k'\overline{a}' \rangle =: l' \subseteq L$. Alors, $\overline{a}'\overline{b}'/\overline{b}'$ est une paire de contrôle pour $k' \leq l'$, de dimension e.

(2) Des extensions L de k' contenant des uplets $\overline{a}'$ comme dans (1) existent.

Preuve. Pour (1), notons que $\overline{b}' \leq \overline{a}'\overline{b}'$ suit de **PC**(iii) et **PC**(iv). Comme $\overline{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{i}_{\overline{b}'} k'$ et $\overline{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{0}_{\overline{b}'} \mathrm{acl}_i(\overline{b}')$ pour $i = 1, 2$, on a $\overline{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{i}_{\overline{b}'} k'$ pour $i = 0, 1, 2$. Le Fait 1.3.4 nous donne que $k' \leq A'_{k'} := \mathrm{acl}_0(A'k')$ (on raisonne comme dans la preuve du Lemme 2.1.7), et donc $\overline{a}'\overline{b}'/\overline{b}'$ est une paire de contrôle pour $k' \leq l'$ (de dimension e).

Pour montrer (2), il suffit d'appliquer le Lemme 2.1.5 à (p_1, p_2), où p_i est un $\mathcal{L}_i$-type générique dans $\psi_i(\overline{x}, \overline{b}', \overline{b}'_0)$ au dessus de k'. La condition **PC**(ii) entraîne que $p_1 \restriction_{\mathcal{L}_0} = p_2 \restriction_{\mathcal{L}_0}$, car $\overline{b}'_0 = \mathrm{Cb}_0(p_i \restriction_{L_0})$ pour $i = 1, 2$ et $p_i \restriction_{\mathcal{L}_0}$ ne $\mathcal{L}_0$-dévie pas au-dessus de $\overline{b}'$.. $\square$

Lemme 2.3.13. *Soit $\Psi = (\psi_1(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0), \psi_2(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0))$ une famille de paires de contrôle (de dimension e), et soient $\overline{b} \subseteq \tilde{b} = \mathrm{cl}_0(\tilde{b}) \leq K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, $\overline{b}_0 \in \mathrm{dcl}_0^{eq}(\langle \tilde{b} \rangle)$ tels que $\models \theta_\Psi(\overline{b}, \overline{b}_0)$. Alors il existe $\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_1(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0), \tilde{\psi}_2(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0))$, une famille de paires de contrôle (de dimension e), avec $\tilde{x} \supseteq \overline{x}$, $\tilde{z} \supseteq \overline{z}$ et $\tilde{z}_0 \supseteq \overline{z}_0$, telle que $\models \tilde{\psi}_i \rightarrow \psi_i$ pour $i = 1, 2$ et $\theta_{\tilde{\psi}}(\tilde{b}, \tilde{b}_0)$ pour un $\overline{b}_0 \subseteq \tilde{b}_0 \in \mathrm{dcl}_0^{eq}(\langle \tilde{b} \rangle)$.*

Preuve. Pour $i = 1, 2$, soient p_i des $\mathcal{L}_i$-types génériques dans $\psi_i(\overline{x}, \overline{b}, \overline{b}_0)$ au-dessus de $k := \langle \tilde{b} \rangle$. Comme $\overline{b}_0 \in \mathrm{dcl}_0^{eq}(k)$, cela a un sens. Supposons que $\overline{a}_i \models p_i$. Comme dans la preuve de 2.3.12, on montre que $\overline{a}_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{0}_{\overline{b}} k$ et $p_1 \restriction_{\mathcal{L}_0} = p_2 \restriction_{\mathcal{L}_0}$, et enfin qu'une application de 2.1.5 à (p_1, p_2) fournit une extension $k \leq l$, avec l contrôlée par une solution $\overline{a}$ de $p_1 \cup p_2$ au-dessus de k. Soit $\tilde{a} := \mathrm{acl}_0(\tilde{b}\overline{a}) \setminus \tilde{b}$. Alors $\tilde{a}\tilde{b}/\tilde{b}$ est une paire de contrôle de l/k. Par le Lemme 2.3.11, il existe une famille de paires de contrôle $\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_1(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0), (\tilde{\psi}_2(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0))$ et $\tilde{b}_0 = \mathrm{Cb}_0(\tilde{a}/\tilde{b}) \supseteq \overline{b}_0$ tel que $\models \tilde{\psi}_1(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{b}_0) \wedge \tilde{\psi}_2(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{b}_0)$ et $\models \tilde{\psi}_i(\tilde{x}, \tilde{b}, \tilde{b}_0) \rightarrow \psi_i(\overline{x}, \overline{b}, \overline{b}_0)$ pour $i = 1, 2$. Quitte à rétrécir les $\tilde{\psi}_i$, on peut supposer que $\models \tilde{\psi}_i(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0) \rightarrow \psi_i(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0)$ pour $i = 1, 2$. $\square$

Maintenant, on considère la $\mathcal{L}$-théorie $T'_\omega := T'_\omega(1, 2, 3)$ donnée par les trois schémas d'axiomes :

$T'_\omega(1)$: $\mathrm{Th}(\tilde{\mathcal{C}}_0)$

$T'_\omega(2)$: $T_1 \cup T_2$

$T'_\omega(3)$: Soit $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ une famille de paires de contrôle de dimension e. Puis, soit $\tau(\overline{x}, \overline{z})$ une formule existentielle à quantification bornée, telle que $K \models \tau(\overline{a}, \overline{b})$ implique $\mathrm{d}(\overline{a}/\overline{b}) < e$. Pour Ψ et τ, on met l'axiome

$$\forall \overline{z}\overline{z}_0 \exists \overline{x}[\theta_\Psi(\overline{z}, \overline{z}_0) \rightarrow \psi_1(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0) \wedge \psi_2(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0) \wedge \neg\tau(\overline{x}, \overline{z})].$$

Théorème 2.3.14. *Les théories T'_ω et T_ω coïncident. Tout modèle $\aleph_1$-saturé de T'_ω est une fusion riche. Réciproquement, toute fusion riche est un modèle $\aleph_0$-saturé de T'_ω.*

Preuve. Soit K une fusion riche. On montre d'abord que $K \models T'_\omega$. Il est clair que $K \models T'_\omega(1)$, et le Lemme 2.1.15 donne $K \models T'_\omega(2)$. Quant au schéma d'axiomes $T'_\omega(3)$, supposons que $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ est une famille de paires de contrôle (de dimension e), et $\overline{b}, \overline{b}_0 \in K$ avec $\models \theta_\Psi(\overline{b}, \overline{b}_0)$. Puis, soit $\tau(\overline{x}, \overline{z})$ une formule comme dans le schéma (3). Quitte à appliquer le Lemme 2.3.13, on peut supposer que $\overline{b} \leq \langle \overline{b} \rangle =: k \leq K$. On trouve, par le Lemme 2.3.12, $k \leq l \in \mathcal{C}_0$ et $\overline{a} \in l$ tel que $\overline{a}\overline{b}/\overline{b}$ soit une paire de contrôle (de dimension e) pour l/k et tel que $\overline{a}$ satisfasse $\psi_1(\overline{x}, \overline{b}, \overline{b}_0) \wedge \psi_2(\overline{x}, \overline{b}, \overline{b}_0)$. Comme K est riche, on peut k-plonger l fortement dans K. Identifiant $\overline{a}$ avec son image dans K par un tel plongement, on obtient $K \models \psi_i(\overline{a}, \overline{b}, \overline{b}_0)$ pour $i = 1, 2$. Or, on a aussi $K \models \neg\tau(\overline{a}, \overline{b})$, car $\mathrm{d}(\overline{a}/\overline{b}) = e$. En particulier, l'axiome correspondant à Ψ et τ dans $T'_\omega(3)$ est satisfait par K. En particulier, on a montré la consistance de T'_ω, car les fusions riches existent.

Ensuite, nous montrons que tout modèle $\aleph_1$-saturé de T'_ω est riche. Une fois que cela est établi, la proposition entière est prouvée, i.e. toute fusion riche est modèle ω-saturé de T'_ω (puisque la $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalence avec un modèle ω-saturé entraîne l'ω-saturation) et $T'_\omega = T_\omega$ (puisque toute structure a des extensions élémentaires $\aleph_1$-saturées et deux théories ayant les mêmes modèles κ-saturés pour un certain κ sont équivalentes).

On considère $K \models T'_\omega$, où K est $\aleph_1$-saturé, et $k \leq K$ une fusion finiment engendrée. Pour tout $k \leq l \in \mathcal{C}_0$ (on suppose que $\mathrm{d}(l/k) = e$), on doit trouver un k-plongement fort de l dans K.

En utilisant le Lemme 2.3.5.(4), on voit que l'on peut approximer "$\mathrm{d}(\overline{x}/\overline{z}) \geq e$" par des formules de la forme $\neg\tau(\overline{x}, \overline{z})$, où $\tau(\overline{x}, \overline{z})$ est une formule existentielle à quantification bornée forçant $\mathrm{d}(\overline{x}/\overline{z}) < e$. On note que l'ensemble de tels τ est clos par disjonction. Combiné avec 2.3.11, cela montre que les axiomes dans $T'_\omega(3)$ approximent bien une réalisation de $\mathrm{qftp}_\mathcal{L}(l/k)$ qui est autosuffisante. Par $\aleph_1$-saturation de K, on peut donc k-plonger fortement l dans K. □

D'un point de vue esthétique, le Théorème 2.3.14 n'est pas satisfaisante, car elle ne caractérise pas les fusions riches par une propriété modèle-théorique. Si l'on exigeait, dans la définition d'une fusion riche, que tout problème d'amalgamation soit résolu pour tout $k \leq l \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ dénombrable, les fusions riches correspondraient exactement aux modèles $\aleph_1$-saturés de T_ω. Cependant, à l'aide d'une notion adaptée de saturation, on peut aussi se contenter de la définition de "riche" que nous avons donnée.

On dira qu'une structure M est $\aleph_\epsilon$*-saturée* si pour tout $\bar{b} \subseteq_\omega M$, tout type au-dessus de $\mathrm{acl}(\bar{b})$ est réalisé dans M. On remarque que d'habitude, dans la définition de la $\aleph_\epsilon$-saturation, la clôture algébrique est prise dans M^{eq}, mais nous la prenons uniquement dans les réels, et cela dans l'ensemble de la thèse. A posteriori, en utilisant le Corollaire 2.3.25, on pourra caractériser les fusions riches de la façon suivante :

Remarque 2.3.15. *Les fusions riches dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ sont exactement les modèles $\aleph_\epsilon$-saturés de T_ω.* □

En modifiant la preuve du Théorème 2.3.14 et en utilisant le Lemme de décomposition 2.2.11, on obtient :

Remarque 2.3.16. *Dans l'axiomatisation de T'_ω, on peut se restreindre aux familles de paires de contrôle donnant lieu à des extensions primitives ou à des extensions génériques.*

Il y a un cadre où l'on peut se dispenser des extensions génériques :

Définition 2.3.17. Soit $T_0 \subseteq T_1$ une expansion satisfaisant à nos hypothèses générales. On dit que l'expansion $T_0 \subseteq T_1$ *renforce la prégéométrie* si pour tout $A \subseteq M \models T_1$ et tout élément a avec $\mathrm{d}_1(a/A) = 1$ on a $\mathrm{acl}_1(Aa) \supsetneq \mathrm{acl}_0(Aa)$.

Notation. Pour $B \subseteq A$, on pose $B \leq_n A$ si et seulement si $\delta(A'/B) \geq 0$ pour tout ensemble A' avec $B \subseteq A' \subseteq A$ et $\mathrm{d}_0(A'/B) \leq n$.

Lemme 2.3.18. *Supposons que le contexte de fusion (T_0, T_1, T_2) est tel que les deux expansions $T_0 \subseteq T_1$ et $T_0 \subseteq T_2$ renforcent la prégéométrie. Alors, toute extension générique de fusions peut être approximée par des extensions parasites.*

Plus précisément, soit $K \leq L \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ une extension générique et $\bar{a} \in L$ avec $\delta(\bar{a}/K) = \mathrm{d}(\bar{a}/K) = 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une extension parasite L'/K et $\bar{a}' \in L'$ avec $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\bar{a}'/K) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\bar{a}/K)$ et $K\bar{a}' \leq_n L'$.

Preuve. Soit donc $K \leq L = \langle Ka \rangle$ une extension générique (avec $L \leq K^*$ pour K^* riche). Observons d'abord que pour $a' \in K^* \setminus K$ on a $\mathrm{d}(a'/K) = 1$ si et seulement si $Ka' \leq_n K^*$ pour tout n, c'est à dire a' satisfait à tous les types partiels suivants :

$$\forall y_1 \ldots y_n \delta(x\bar{y}/K) \geq 1.$$

Rappelons que les $\mathcal{L}_i$ ne contiennent pas de symboles de fonctions. Il suffit alors de trouver des singletons $a_n \in K^*$ satisfaisant $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\langle Ka_n \rangle^n/K) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\langle Ka \rangle^n/K)$ et $\mathrm{d}_0(\mathrm{cl}_0(Ka_n)/K) \geq n$. On va construire une extension parasite $K \leq L_n = \mathrm{cl}_\omega(Ka_n)$ avec a_n comme requis.

Nous renvoyons à 2.2.5 pour la définition de $\langle \cdot \rangle^n$. Pour construire L_n, on considère d'abord $A'_n := \langle Ka \rangle^n$. Par induction sur n, en utilisant l'hypothèse que les expansions $T_0 \subseteq T_i$ renforcent la prégéométrie et que $\mathrm{d}(a/K) = 1$, on voit que A'_n n'est pas acl_i-clos, pour $i = 1, 2$. On peut donc choisir (dans L) des éléments $c_i \in \mathrm{acl}_i(A'_n) \setminus A'_n$. Maintenant, on applique le Lemme 2.1.5 aux types

$p_i := \mathrm{tp}_i(\mathrm{acl}_0(A'_n c_i)/K)$ au-dessus de K, et on obtient une extension L_n/K qui est contrôlée au-dessus de K par une réalisation de $p_1 \cup p_2$. On vérifie sans peine que L_n/K est parasite. Soit $a_n \in L_n$ l'élément qui correspond à a dans L. Alors, $A_n := \mathrm{cl}_0(Ka_n) \subseteq \langle Ka_n\rangle^{n+1}$ et $A_n \nsubseteq \langle Ka_n\rangle^n$ (par construction).

A fortiori, $\mathrm{d}_0(\mathrm{cl}_0(A_n)/K) \geq n+1$, car si $A_n \cap \langle Ka_n\rangle^m = A_n \cap \langle Ka_n\rangle^{m+1}$ pour un m, il s'en suit que $A_n \subseteq \langle Ka_n\rangle^m$ (par 2.2.13). □

Combinant ce résultat avec le Lemme de décomposition, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.19. *Soit (T_0, T_1, T_2) un contexte de fusion, où $T_0 \subseteq T_i$ renforce la prégéométrie, pour $i = 1, 2$. Alors, dans l'axiomatisation de T_ω, le schéma (3) prend la forme*

$$\forall \overline{z}\overline{z}_0 \exists \overline{x}[\theta_\Psi(\overline{z}, \overline{z}_0) \rightarrow \psi_1(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0) \wedge \psi_2(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0)],$$

où Ψ parcourt les familles de paires de contrôles donnant lieu à des extensions primitives. □

Exemples 2.3.20. (1) Soit $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_p}$ la théorie d'un espace vectoriel infini sur $\mathbb{F}_p$, et soit T_1 une complétion de la théorie des corps pseudo-finis de caractéristique p. La théorie T_1 est une expansion de T_0 (le $\mathcal{L}_0$-réduit est donné par le groupe additif du corps). Alors, $T_0 \subseteq T_1$ renforce la prégéométrie. Cela est aussi vrai, si T_0 est la théorie d'un ensemble infini sans structure et T_1 une théorie complète de corps pseudofinis (de caractéristique arbitraire).

(2) Soit T_0 la théorie d'un ensemble infini sans structure, et soit T_1 le graphe aléatoire (où une expansion d'une théorie fortement minimale T_0 qu'on peut obtenir en ajoutant un prédicat aléatoire à la Chatzidakis-Pillay [CP98]. On a $\mathrm{acl}_1(A) = A = \mathrm{acl}_0(A)$, et donc l'expansion $T_1 \supseteq T_0$ ne renforce pas la prégéométrie.

(3) Soit $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$, et T_1 la théorie d'un espace vectoriel infini sur $\mathbb{F}_q$ avec une forme bilinéaire générique $\beta(\cdot,\cdot)$. Alors, $T_0 \subseteq T_1$ ne renforce pas la prégéométrie, car dans cet exemple on a $\mathrm{acl}_1 = \mathrm{acl}_0$ aussi.

Pour pouvoir pleinement exploiter le Théorème 2.3.14, il est commode de considérer la classe $\tilde{\mathcal{C}}_0$ ainsi que la théorie T_ω dans une expansion par définitions de $\mathcal{L}$.

Définition 2.3.21. Soit $\mathcal{L}^*$ l'expansion par définitions de $\mathcal{L}$ donnée par l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules existentielles (sans paramètres) à quantification bornée.

Formellement, ce nouveau langage $\mathcal{L}^*$ est construit ainsi : pour toute formule existentielle à quantification bornée $\tau(\overline{x}) = \tau(x_0, \ldots, x_{n-1})$ on introduit un nouveau symbole de relation n-aire $R_\tau(\overline{x})$. Puis, on considère T_ω (et toute autre théorie qui implique $\mathrm{Th}_\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{C}}_0)$) dans le langage $\mathcal{L}^*$, en ajoutant aux $\mathcal{L}$-axiomes les "définitions" des R_τ, c'est à dire pour tout τ on impose

$$\forall \overline{x}(R_\tau(\overline{x}) \leftrightarrow \tau(\overline{x})).$$

On écrit T_ω^* pour dénoter la théorie T_ω ainsi obtenue dans $\mathcal{L}^*$, de même $\tilde{\mathcal{C}}_0^*$ dénote la classe $\tilde{\mathcal{C}}_0$, considérée dans $\mathcal{L}^*$.

Notation. On écrira tp_ω au lieu de tp_{T_ω} ainsi que acl_ω au lieu de acl_{T_ω}.

Théorème 2.3.22 (Élimination des quanteurs)**.**

(1) Soient $A_i \subseteq M_i \models T_\omega$ pour $i = 1, 2$ des uplets (pas nécessairement finis). Alors

$$\mathrm{tp}_\omega(A_1) = \mathrm{tp}_\omega(A_2) \ \textit{ssi}\ \mathrm{cl}_\omega^{M_1}(A_1) \cong_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\omega^{M_2}(A_2).$$

(2) La théorie T_ω^* élimine les quanteurs (dans $\mathcal{L}^*$).

(3) La $\mathcal{L}$-théorie T_ω est presque modèle-complète, i.e. toute $\mathcal{L}$-formule est équivalente, dans T_ω, à une combinaison booléenne de $\mathcal{L}$-formules existentielles.

Preuve. Notons d'abord que (2) est une conséquence de (1), car il y a suffisamment de $\mathcal{L}$-formules pour décrire uniformément la clôture autosuffisante (c'est la partie (2) du Lemme 2.3.5). Puis, (3) suit de (2). Il suffit donc de montrer (1).

On peut supposer que A_1 et A_2 sont finis. L'implication est claire. Réciproquement, supposons que $\mathrm{cl}_\omega^{M_1}(A_1) \cong_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\omega^{M_2}(A_2)$. Par le Théorème 2.3.14, les modèles saturés de T_ω sont riches. On peut donc établir un va-et-vient infini au-dessus du $\mathcal{L}$-isomorphisme donné entre les $\mathrm{cl}_\omega^{M_i}(A_i)$, d'où $\mathrm{tp}_\omega(A_1) = \mathrm{tp}_\omega(A_2)$. □

Corollaire 2.3.23. *Soient $M \subseteq N$ deux modèles de T_ω. Alors $M \preccurlyeq N$ si et seulement si $M \leq N$.* □

Corollaire 2.3.24. *Les complétions de T_ω sont données par les $\mathcal{L}$-types d'isomorphisme possibles de $\langle\emptyset\rangle \in \mathcal{C}_0$, c'est à dire pour $M, N \models T_\omega$ on a $M \equiv N$ si et seulement si $\langle\emptyset\rangle_M \cong_{\mathcal{L}} \langle\emptyset\rangle_N$.* □

Corollaire 2.3.25. *Pour tout $A \subseteq M \models T_\omega$ on a $\mathrm{cl}_\omega^M(A) = \mathrm{acl}_\omega(A)$, i.e. la clôture algébrique au sens de T_ω est donnée par la clôture autosuffisante.*

Preuve. L'inclusion $\mathrm{cl}_\omega^M(A) \subseteq \mathrm{acl}_{T_\omega}(A)$ suit de 2.1.3, et il suffit donc de montrer que $K := \mathrm{cl}_\omega^M(A)$ est algébriquement clos. Soit $K \leq M \leq K^* \models T_\omega$ et $\alpha \in K^* \setminus K$. On a $K \leq \mathrm{cl}_\omega(K\alpha) =: L \leq K^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $L_1, \ldots, L_n$ des copies isomorphes de L au-dessus de K. On peut supposer que K^* est suffisamment saturé, et on peut alors plonger fortement un amalgame libre $L_1 \otimes_K \ldots \otimes_K L_n$ dans K^*. En utilisant le Théorème 2.3.22, on voit que $\mathrm{tp}_\omega(\alpha/K)$ admet un nombre non-borné de réalisations, d'où $\alpha \notin \mathrm{acl}_\omega(K)$. □

2.4 Simplicité

Dans cette section, nous montrons — sous une hypothèse supplémentaire — que toute complétion de T_ω est supersimple (Théorème 2.4.10). Pour cela, nous étudions une notion d'indépendance inhérente à la construction de la fusion libre.

Définition 2.4.1. Soient $A, B, C \subseteq K$, où K est une fusion. On pose $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B} C$ ssi $\mathrm{cl}_\omega(BA) \cap \mathrm{cl}_\omega(BC) = \mathrm{cl}_\omega(B)$ et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}_{B} C$.

Le Lemme 2.1.9 montre :

Remarque 2.4.2. *Soient $B \subseteq A, C \subseteq K$ des sous-ensembles cl_ω-clos de la fusion K. Alors, sont équivalents :*

(1) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B} C$.

(2) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{B} C$ $(i = 1, 2)$ et $AC \leq K$.

(3) $D := \langle AC \rangle$ est un amalgame libre de A et C au-dessus de B et $D \leq K$. □

Lemme 2.4.3. *La notion $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}$ est symétrique et transitive, c'est à dire pour tout A, B, C, D on a*

Symétrie : $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B} C$ si et seulement si $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B} A$.

Transitivité : $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B} CD$ si et seulement si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B} C$ et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{BC} D$.

Preuve. La symétrie est claire par définition. Pour montrer la transitivité, il suffit de traiter le cas où $B \leq A, C$ et $C \leq D$ sont tous cl_ω-clos. Si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B} C$ et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{C} D$, alors $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B} D$ suit de la Remarque 2.4.2(2). Pour l'autre direction, notons que $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B} D \Rightarrow A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B} C$ suit de la définition de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}$, puisque $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}_{B} D$ entraîne $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}_{B} C$. Le fait que $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B} D$ implique $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{C} D$ est une conséquence du Lemme 2.2.6 : on l'applique à $C \leq A', D$, où $A' := \mathrm{acl}_0(AC)$. Comme $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B} C$, A' est fort dans K. Les autres hypothèses de 2.2.6, en l'occurrence $A' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{C} D$ et $A' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}_{C} D$, sont satisfaites, et on déduit donc que $\mathrm{cl}_\omega(AC) \cap D = C$, car $\mathrm{cl}_\omega(AC) = \langle A' \rangle$. □

Lemme 2.4.4 (Caractère local)**.** *Soient M une fusion, $B \subseteq M$ et $\overline{\alpha} \in M$ un uplet fini. Alors il existe $B_0 \subseteq_\omega B$ tel que $\overline{\alpha} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B_0} B$.*

Preuve. On pose $L := \mathrm{cl}_\omega(B\overline{\alpha})$ et $K := \mathrm{cl}_\omega(B)$. Donc, $L = \langle K\overline{a} \rangle$ pour un uplet fini $\overline{a} \in M$ contrôlant L au-dessus de K, $\overline{a} \supseteq \overline{\alpha}$. Maintenant, on choisit $k \leq K$ finiment engendré tel que $\mathrm{d}(\overline{a}/K) = \delta(\overline{a}/K) = \delta(\overline{a}/k) = \mathrm{d}(\overline{a}/k)$, et on pose $l := \langle k\overline{a} \rangle$ (c'est autosuffisant dans M). Le Lemme 2.1.9 entraîne que L est un amalgame libre de K et l au-dessus de $k' := K \cap l$. Or, k' est une fusion contenue de manière autosuffisante dans une fusion finiment engendrée, et donc finiment engendréee aussi, par le Lemme 2.2.12. Pour terminer la preuve, il suffit de choisir un ensemble $B_0 \subseteq B$ fini tel que $k' \subseteq \mathrm{cl}_\omega(B_0)$. □

Proposition 2.4.5. *Dans toute complétion T de T_ω, la notion $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}$ définit une notion d'indépendance, c'est à dire elle satisfait aux propriétés (i)-(vii) de la Définition 1.1.2.*

Preuve. L'invariance par automorphisme est claire, et la non-trivialité suit de la définition de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}$ et de l'égalité $\mathrm{acl}_\omega = \mathrm{cl}_\omega$ (Corollaire 2.3.25).

Ensuite, la propriété d'extension suit de l'existence d'un amalgame libre dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$, combiné avec le fait qu'on peut toujours plonger un amalgame libre de deux fusions fortes de manière autosuffisante dans un modèle suffisamment saturé (donc riche) de T.

Le caractère fini est une conséquence immédiate de : cl_ω est un opérateur finitaire, $\otimes$ ainsi que $\leq$ passent à la limite.

Enfin, la symétrie et la transitivité sont montrées dans 2.4.3, tandis que le caractère local est le contenu du Lemme 2.4.4. $\square$

Nous avons besoin d'introduire une hypothèse supplémentaire pour obtenir des résultats d'amalgamation qui permettent d'établir le théorème d'indépendance. Rappelons qu'une suite $(A_i)_{i<\alpha}$ est indépendante au-dessus de B si pour tout $\beta < \alpha$ on a $A_\beta \mathop{\smile\!\!\!\!\!\vert}_B \bigcup_{i<\beta} A_i$.

Définition 2.4.6. (1) On dit qu'une expansion de théories simples $T_0 \subseteq T_1$ *a une algébricité indépendante*, si pour tout $M \models T_1$ et toute suite T_1-indépendante A, B, C au-dessus de M avec $A, B, C \supseteq M$ on a

$$\mathrm{acl}_1(AB)\,\mathrm{acl}_1(AC) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\vert}^{0}_{BC} \mathrm{acl}_1(BC).$$

(2) Nous disons que le contexte de fusion (T_0, T_1, T_2) satisfait à *l'hypothèse* **A**, si l'expansion $T_0 \subseteq T_i$ a une algébricité indépendante pour $i = 1$ et $i = 2$.

Lemme 2.4.7. *Soit T_0 fortement minimale et modulaire.*

1. *Si T_0 a une prégéométrie triviale, alors toute expansion simple $T_0 \subseteq T_1$ a une algébricité indépendante.*
2. *Si T_1 est stable, alors $T_0 \subseteq T_1$ a une algébricité indépendante.*

Preuve. C'est clair pour (1). Quant à (2), c'est un argument de cohéritier qui le donne tout de suite. Soit $M \models T_1$ et soit A, B, C une suite T_1-indépendante au-dessus de M telle que $A, B, C \supseteq M$. Comme T_0 est modulaire et fortement minimale, il suffit de montrer que $\mathrm{acl}_0(\mathrm{acl}_1(AB)\,\mathrm{acl}_1(AC)) \cap \mathrm{acl}_1(BC) = \mathrm{acl}_0(BC)$. Soient $\bar a \in A$, $\bar b \in B$ et $\bar c \in C$. Soit $\bar f \in \mathrm{acl}_1(BC) \setminus \mathrm{acl}_0(BC)$. Puis, soit $\bar d \in \mathrm{acl}_1(AB)$ avec $\models \varphi_1(\bar d, \bar a, \bar b)$, où $\varphi_1(\bar x, \bar z, \bar b)$ est une $\mathcal{L}_1$-formule à paramètres dans $M\bar b$ qui rend $\bar d$ explicitement algébrique au-dessus de $M\bar b\bar a$. De même pour $\bar e \in \mathrm{acl}_1(AC)$ et une formule $\varphi_1'(\bar y, \bar z, \bar c)$ avec $\models \varphi_1'(\bar e, \bar a, \bar c)$. Puis, soit $\chi_0(\bar w, \bar x, \bar y)$ une $\mathcal{L}_0(M)$-formule, explicitant $\bar w \in \mathrm{acl}_0(M\overline{xy})$ avec $\models \chi_0(\bar f, \bar d, \bar e)$. Comme $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}_1}(\bar a / \mathrm{acl}_1(M\bar b\bar c))$ est le cohéritier de sa restriction à M, on trouve $\bar m \in M$ avec $\models \exists \overline{xy} \varphi_1(\bar x, \bar m, \bar b) \wedge \varphi_1'(\bar y, \bar m, \bar c) \wedge \chi_0(\bar f, \bar x, \bar y)$. On en déduit facilement que $\bar f \in \mathrm{acl}_0(M\bar b\bar c)$. $\square$

Remarque. *Nous ignorons s'il y a des exemples d'expansions $T_1 \supseteq T_0$ (disons avec T_1 supersimple de rang* SU *1 et T_0 fortement minimale et modulaire) sans algébricité indépendante.*

Dans le lemme suivant, nous utilisons la notion d'une *suite $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\vert}^*$-indépendante* (définie comme une suite indépendante classique, en remplaçant $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\vert}$ par $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\vert}^*$). Comme $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\vert}^*$ est une notion d'indépendance (en particulier symétrique et transitive), les suites $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\vert}^*$-indépendantes ont des propriétés similaires à celles des suites indépendantes dans une théorie simple.

Lemme 2.4.8. *Supposons l'hypothèse* **A***, et soit* $K \models T_1 \cup T_2$ *une fusion,* $K \subseteq A, B, C \subseteq M$*, où* M *est riche et* A, B, C *une suite* $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}$*-indépendante de sous-ensembles* cl_ω*-clos de* M*. On pose* $D := \langle BC\rangle = \mathrm{cl}_\omega(BC)$*,* $E := \langle AB\rangle = \mathrm{cl}_\omega(AB)$ *et* $F := \langle AC\rangle = \mathrm{cl}_\omega(AC)$*. Alors,* D, E, F *est une suite* $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}$*-indépendante au-dessus de* ABC*, pour* $i \in \{0, 1, 2\}$*.*

Preuve. Par induction sur $m + n + p$, on va montrer :

$(*)^{m,n,p}$ La suite $(\langle AB\rangle_j^m, \langle AC\rangle_j^n, \langle BC\rangle_j^p)$ est $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}$-indépendante au-dessus de l'ensemble ABC, pour $i = 0, 1, 2$ et $j = 1, 2$.

Une fois que $(*)^{m,n,p}$ est montré, la preuve est terminée. Pour l'établir, il suffit de montrer que $\langle AB\rangle_j^m \langle AC\rangle_j^n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{BC} \langle BC\rangle_j^p$ pour $i = 0, 1, 2$, puisque nous avons $\langle AB\rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B} \langle BC\rangle$ par hypothèse, ce qui entraîne $\langle AB\rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{B} \langle BC\rangle$ par 2.4.2 et donc aussi $\langle AB\rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{BC} \langle BC\rangle$ pour tout i.

Les ensembles BC, $\langle AB\rangle_j^m \langle AC\rangle_j^n$ et $\langle BC\rangle_j^p$ étant forts, le Lemme 2.2.6 montre

$$\langle AB\rangle_j^m \langle AC\rangle_j^n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{BC} \langle BC\rangle_j^p \Rightarrow \langle AB\rangle_j^m \langle AC\rangle_j^n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{BC} \langle BC\rangle_j^p \text{ pour } i = 1, 2.$$

On raisonne par l'absurde. Il existe donc $m, n, p \in \mathbb{N}$ avec $m+n+p$ minimal tels que $(*)^{m,n,p}$ soit faux. Par symétrie, on peut supposer que $m \leq n \leq p$ et

$$\langle AB\rangle_1^m \langle AC\rangle_1^n \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{BC} \langle BC\rangle_1^p.$$

Par hypothèse, l'expansion $T_0 \subseteq T_1$ a une algébricité indépendante, et donc nécessairement $p \geq 2$ (car $m \leq n \leq p$).

Par minimalité de $m+n+p$, on a $\langle AB\rangle_2^m \langle AC\rangle_2^n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{1}_{BC} \langle BC\rangle_2^{p-1}$ ce qui donne $\langle AB\rangle_1^{m+1} \langle AC\rangle_1^{n+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{1}_{\langle BC\rangle_1^1} \langle BC\rangle_1^p$ (par la définition des hiérarchies $\langle \cdot \rangle_j^k$), et en particulier

$$\langle AB\rangle_1^m \langle AC\rangle_1^n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{\langle BC\rangle_1^1} \langle BC\rangle_1^p. \tag{2.2}$$

Puisque $p \geq 2$, on a $\langle AB\rangle_1^m \langle AC\rangle_1^n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{BC} \langle BC\rangle_1^1$, car $m + n + 1 < m + n + p$. Par transitivité et l'équation (2.2) on arrive donc à $\langle AB\rangle_1^m \langle AC\rangle_1^n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{BC} \langle BC\rangle_1^p$, une contradiction. □

Proposition 2.4.9. *Supposons l'hypothèse* **A***, et soit* $K \models T_1 \cup T_2$ *une fusion,* $K \leq A_0, A_1, A_2 \in \tilde{\mathcal{C}}_0$*. Supposons données des fusions* $A_{\{0,1\}}, A_{\{0,2\}}$ *et* $A_{\{1,2\}}$ *ainsi que des* K*-plongements forts* $\iota_k^w : A_k \hookrightarrow A_w$ *pour* $k \in w$*, tels que* $A_{\{i,j\}}$ *soit un amalgame libre des images de* A_i *et* A_j *pour les plongements* $\iota_i^{\{i,j\}}$ *et* $\iota_j^{\{i,j\}}$*.*

Alors il existe une K*-fusion* A *et des* K*-plongements forts* $\iota_w : A_w \hookrightarrow A$ *satisfaisant*

(1) $\iota_w \circ \iota_k^w = \iota_{w'} \circ \iota_k^{w'}$ *si* $k \in w \cap w'$ *(ce plongement est noté* ι_k*),*

(2) $\iota_0(A_0), \iota_1(A_1), \iota_2(A_2)$ *est une suite* $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^*$*-indépendante au-dessus de* K*.*

Preuve. On peut supposer que $A_1, A_2 \leq A_{\{1,2\}}$, c.à.d. $\iota_1^{\{1,2\}}$ et $\iota_2^{\{1,2\}}$ sont des inclusions. D'abord, nous construisons des $\mathcal{L}_1$-plongements $\iota'_w : A_w \hookrightarrow M' \models T_1$ satisfaisant la condition (1) ainsi que certaines conditions d'indépendance.

On choisit $M' \supseteq A_{\{1,2\}}$, un modèle suffisamment saturé de T_1 (en particulier, $\iota'_{\{1,2\}}$ sera donnée par l'inclusion).

Par le théorème d'indépendance dans T_1, on trouve A'_0 avec

(I) $A'_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^1_K A_1A_2$, et $A'_0 \equiv^1_{A_1} \iota_0^{\{0,1\}}(A_0)$ ainsi que $A'_0 \equiv^1_{A_2} \iota_0^{\{0,2\}}(A_0)$.

On peut choisir A'_0 de telle manière que

(II) $A'_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^1_K A_{\{1,2\}}$.

Identifiant A'_0 et $\iota_0^{\{0,1\}}(A_0)$, on trouve $A'_{\{0,1\}}$ satisfaisant

(III) $A'_{\{0,1\}} \equiv^1_{A'_0A_1} A_{\{0,1\}}$ et $A'_{\{0,1\}} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^1_{A'_0A_1} A_{\{1,2\}}$.

De même, identifiant A'_0 avec $\iota_0^{\{0,2\}}(A_0)$, on trouve $A'_{\{0,2\}}$ satisfaisant

(IV) $A'_{\{0,2\}} \equiv^1_{A'_0A_2} A_{\{0,2\}}$ et $A'_{\{0,2\}} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^1_{A'_0A_2} A'_{\{0,1\}}A_{\{1,2\}}$.

Finalement, par (III) et (IV), nous avons le suivant :

(V) $A'_{\{0,1\}}, A'_{\{0,2\}}, A_{\{1,2\}}$ est une suite T_1-indépendante au-dessus de l'ensemble $A'_0A_1A_2$.

Les identifications que nous avons faites fournissent des $\mathcal{L}_1$-plongements $\iota'_{\{0,i\}} : A'_{\{0,i\}} \hookrightarrow M'$ pour $i = 1, 2$ qui satisfont évidemment (1).

Voilà les conséquences de (I)-(V) au niveau des $\mathcal{L}_0$-réduits : d'abord, par (III) et (II), on a $A'_{\{0,1\}} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^1_{A_1} A_{\{1,2\}}$, ce qui donne

(III-0) $A'_{\{0,1\}} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^0_{A_1} A_{\{1,2\}}$.

Puis, (IV) donne $A'_{\{0,2\}} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^0_{\mathrm{acl}_1(A'_0A_2)} A'_{\{0,1\}}A_{\{1,2\}}$. Par ailleurs, on prétend que

$$\mathrm{acl}_1(A'_0A_2) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^0_{A'_0A_2} A'_{\{0,1\}}A_{\{1,2\}}, \tag{2.3}$$

ce qui donnera (IV-0).

Pour montrer (2.3), notons d'abord que (2.3) est un énoncé qui dépend uniquement de $q_1 := \mathrm{tp}_1(A'_{\{0,1\}}A_{\{1,2\}})$. Comme $A'_{\{0,1\}} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^1_{A_1} A_{\{1,2\}}$, par la Remarque 2.1.8, il existe un amalgame libre (auxiliaire) $\tilde{A} = A'_{\{0,1\}} \otimes_{A_1} A_{\{1,2\}}$ tel que $\mathrm{tp}_1(\tilde{A}'_{\{0,1\}}\tilde{A}_{\{1,2\}}) = q_1$, où nous écrivons $\tilde{X}$ chaque fois qu'un ensemble X est considéré comme sous-ensemble de $\tilde{A}$. Les fusions $\tilde{A}'_0, \tilde{A}_1$ et $\tilde{A}_2$ forment une suite $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^*$-indépendante, avec $\tilde{A}'_{\{0,1\}} = \langle \tilde{A}'_0\tilde{A}_1 \rangle$ et $\tilde{A}_{\{1,2\}} = \langle \tilde{A}_1\tilde{A}_2 \rangle$.

Or, le Lemme 2.4.8 implique $\langle \tilde{A}'_0\tilde{A}_2\rangle \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^0_{\tilde{A}'_0\tilde{A}_1\tilde{A}_2} \tilde{A}'_{\{0,1\}}\tilde{A}_{\{1,2\}}$, et en particulier $\mathrm{acl}_1(\tilde{A}'_0\tilde{A}_2) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^0_{\tilde{A}'_0\tilde{A}_2} \tilde{A}'_{\{0,1\}}\tilde{A}_{\{1,2\}}$. Comme $\mathrm{tp}_1(\tilde{A}'_{\{0,1\}}\tilde{A}_{\{1,2\}}) = \mathrm{tp}_1(A'_{\{0,1\}}A_{\{1,2\}})$, on a montré (2.3).

(IV-0) $A'_{\{0,2\}} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^0_{A'_0A_2} A'_{\{0,1\}}A_{\{1,2\}}$.

On combine (III-0) et (IV-0) pour obtenir

(V-0) Le système $(K, A'_0, A_1, A_2, A'_{\{0,1\}}, A'_{\{0,2\}}, A_{\{1,2\}}, M')$, avec les indices et plongements évidents, est un système indépendant de modèles de T_0.

Par le Fait 1.2.2 et (V-0), $\mathrm{tp}_0(A'_{\{0,1\}}, A'_{\{0,2\}}, A_{\{1,2\}})$ est complètement déterminé par le système en question.

Changeant $\mathcal{L}_1$ en $\mathcal{L}_2$, on peut obtenir des $\mathcal{L}_2$-plongements $\iota''_w : A_w \hookrightarrow M'' \models T_2$ satisfaisant à (1), en considérant $A_{\{1,2\}} \subseteq M'' \models T_2$ suffisamment saturé, et en trouvant A''_0, $A''_{\{0,1\}}$ et $A''_{\{0,2\}}$ vérifiant les analogues de (I)-(V).

Par ce qui est dit plus haut, on a l'égalité

$$\mathrm{tp}_0(A'_{\{0,1\}}A'_{\{0,2\}}A_{\{1,2\}}) = \mathrm{tp}_0(A''_{\{0,1\}}A''_{\{0,2\}}A_{\{1,2\}}).$$

Il suffit d'appliquer 2.1.5 à $\mathrm{tp}_1(A'_{\{0,1\}}A'_{\{0,2\}}A_{\{1,2\}})$ et $\mathrm{tp}_2(A''_{\{0,1\}}A''_{\{0,2\}}A_{\{1,2\}})$ pour obtenir la fusion A cherchée. Notons que les plongements ι_w sont donnés implicitement par notre construction. Puis, (2) suit du fait que A est un amalgame libre de A'_0 et $A_{\{1,2\}}$ au-dessus de K (on applique 2.4.8). □

Théorème 2.4.10. *Supposons l'hypothèse* **A**. *Alors toute complétion T de T_ω est supersimple, et la relation de non-déviation $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}$ dans T est donnée par $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^*$.*

Le rang SU *d'une extension parasite est égal à la longueur d'une décomposition en extensions primitives, et* $\mathrm{SU}(g/A) \leq \omega$ *pour tout g avec* $\mathrm{d}(g/A) = 1$.

Preuve. On utilise le Théorème de Kim-Pillay 1.1.3. Il a déjà été montré que $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^*$ est une notion d'indépendance dans la Proposition 2.4.5. Puis, une fois que la simplicité de T est établie, 2.4.4 montre que tout type finitaire ne dévie pas au-dessus d'un ensemble fini, d'où la supersimplicité de T. Or, le Théorème d'Indépendance suit de la Proposition 2.4.9.

Les énoncés concernant le rang SU découlent des Inégalités de Lascar (Fait 1.1.5), car le rang SU d'une extension primitive est égal à 1 (c'est précisément le contenu du Lemme 2.2.2). Pour les extensions parasites, c'est clair. Puis, si $g \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^*_B B'$ pour un singleton g avec $\mathrm{d}(g/B) = 1$, forcément $\mathrm{d}(g/B') = 0$. On en déduit que $\mathrm{SU}(g/B') < \omega$, car $\mathrm{cl}_\omega(B'g)/\,\mathrm{cl}_\omega(B')$ est une extension parasite. □

En fait, la Proposition 2.4.9 montre :

Corollaire 2.4.11. *Dans la situation du Théorème 2.4.10, le théorème d'indépendance est valide au-dessus de toute fusion $K = \mathrm{cl}_\omega(K) \models T_1 \cup T_2$.* □

On note que le Théorème 2.4.10 implique en particulier que les longueurs de deux décompositions d'une extension parasite en extensions primitives sont les mêmes. Cela établit la seconde partie de la Proposition 2.2.9 qui n'était jusqu'alors pas démontrée, au moins dans le cas où toute complétion de T_ω est simple avec $\downarrow = \downarrow^*$. Or, sans cette hypothèse, on peut toujours définir un rang de Lascar par rapport à $\downarrow^*$ que l'on note SU^*. Comme dans le cas simple, on a $\mathrm{SU}^*(l/k) = 1$ par 2.2.2, et la remarque suivante fournit l'argument grâce auquel on peut se passer de la simplicité.

Remarque 2.4.12. *Soit $\downarrow^*$ une notion d'indépendance, et soit SU^* le rang de fondation par rapport à la $\downarrow^*$-déviation. Alors, SU^* satisfait aux Inégalités de Lascar (cf. 1.1.5).*

Preuve. La preuve dans le cas simple donnée dans [Wa00] s'applique sans changement. □

Pour conclure, nous allons montrer que tout type parasite est monobasé. Pour cela, le lemme suivant est bien utile, car il permet de comprendre facilement la déviation au sein d'un type parasite. On aurait pu énoncer ce lemme déjà depuis d'un moment.

Lemme 2.4.13. *Soit L une extension parasite de $K = \mathrm{cl}_\omega(K)$, et soit $M = \mathrm{cl}_\omega(M)$ une extension arbitraire de K. Alors $L \downarrow^*_K M$ ssi $L \cap M = K$ ssi $L \downarrow^0_K M$.*

Preuve. Il suffit de combiner le Lemme 2.1.9 avec 2.4.2, car $L \downarrow^{\mathrm{d}}_K M$ est automatique pour L/K parasite. □

Proposition 2.4.14. *Soit T une complétion de T_ω, et supposons que T soit simple avec $\downarrow = \downarrow^*$. Alors, tout type parasite est monobasé.*

Preuve. C'est une conséquence de la caractérisation de la non-déviation pour les extensions parasites donnée dans le Lemme 2.4.13. □

Les types monobasés dans une théorie simple (et surtout stable) ont de jolies propriétés. On verra l'utilité de 2.4.14 au cours du Chapitre 3. Dans ce chapitre, on étudiera un contexte de fusion qui mène à une théorie T_ω complète et ω-stable.

2.5 Paires magnifiques de fusions libres

Dans [BPV03], la notion d'une *paire magnifique* de modèles de T est introduite et étudiée, où T est une théorie simple complète. Dans cette section, en travaillant dans la classe des paires de fusions, nous montrons que tout modèle suffisamment saturé de la théorie des paires magnifiques de modèles de T_ω est une paire magnifique. On obtient comme corollaire que toute complétion T de T_ω a la wnfcp (si T est simple avec $\downarrow = \downarrow^*$).

Le concept d'une paire magnifique (d'une théorie simple) est une généralisation commune des deux notions suivantes :

– les *belles paires* (de modèles d'une théorie stable) étudiées par Poizat dans [Po83],
– les *paires génériques* (de modèles d'une théorie simple de rang SU égal à 1) étudiées par Vassiliev dans [Va03].

Il est observé dans [BPV03] que pour une théorie stable T, une "paire magnifique" est (essentiellement) la même chose qu'une "belle paire".

Supposons que T est une $\mathcal{L}$-théorie simple et complète qui élimine les quanteurs. Soit $\mathcal{L}_P := \mathcal{L} \cup \{P\}$, où P est un nouveau prédicat unaire. Une $\mathcal{L}_P$-structure est donc de la forme $(M, P(M))$, pour une $\mathcal{L}$-structure M et $P(M) \subseteq M$.

Définition 2.5.1. Soit $\kappa \geq |T|^+$. Une $\mathcal{L}_P$-structure $(M, P(M))$ est une *paire κ-magnifique* si $P(M) \preccurlyeq_{\mathcal{L}} M \models T$ et si les propriétés suivantes sont satisfaites :

$(i)_\kappa$ Pour tout sous-ensemble $A \subseteq M$ de cardinalité $< \kappa$ et tout $\mathcal{L}$-type (finitaire) $p \in S(A)$ il existe $\overline{a} \in M$ réalisant p tel que $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A P(M)$.

$(ii)_\kappa$ Pour tout $A \subseteq M$ de cardinalité $< \kappa$ et tout $\mathcal{L}$-type (finitaire) $p \in S(A)$ tel que p ne dévie pas au-dessus de $P(A)$, il existe $\overline{a} \in P(M)$ avec $\overline{a} \models p$.

Dans [BPV03], il est montré que les paires κ-magnifiques existent pour tout κ, et que toute paire se plonge dans une paire κ-magnifique. Puis, par va-et-vient infini, on établit que deux paires κ-magnifiques (pour $\kappa \geq |T|^+$) sont $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalentes. En particulier, elles ont la même $\mathcal{L}_P$-théorie élémentaire que l'on note $T^{\mathfrak{P}}$. Disons, par abus de langage, que les paires (κ-)magnifiques de modèles de T sont *axiomatisables* si un modèle suffisamment saturé de $T^{\mathfrak{P}}$ est une paire (κ-)magnifique. Dans [BPV03], la relation entre l'axiomatisabilité des paires magnifiques de T et certaines propriétés de T est étudiée en détail, et plusieurs conditions équivalentes à l'axiomatisabilité de $T^{\mathfrak{P}}$ sont données. Dans le cas où les paires magnifiques sont axiomatisables, [BPV03] fait une étude systématique de la théorie $T^{\mathfrak{P}}$ (si les paires magnifiques ne sont pas axiomatisables, il faut sortir du cadre des classes élémentaires de structures).

Le cas où T est supersimple de rang SU égal à 1 avait déjà été traité par Vassiliev [Va03].

Citons quelques résultats :

Fait 2.5.2 ([BPV03])**.** *Soit T simple et complète.*

(1) La théorie $T^{\mathfrak{P}}$ est axiomatisable si et seulement si T a la wnfcp.

(2) Si $T^{\mathfrak{P}}$ est axiomatisable, c'est une théorie simple (supersimple si T est supersimple) et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{T^{\mathfrak{P}}}$ a une description concrète en terme de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{T}$.

En général, on doit considérer les paires $|T|^+$-magnifiques mais dans le cadre de la fusion libre, on peut faire mieux :

Définition 2.5.3. Une $\mathcal{L}_P$-structure $(M, P(M))$ est une *paire $\aleph_\epsilon$-magnifique* si $P(M) \preccurlyeq_{\mathcal{L}} M \models T$ et si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

$(i)_\epsilon$ Pour tout sous-ensemble $A \subseteq M$ tel que $A = \mathrm{acl}(\overline{b})$ pour un uplet $\overline{b}$ fini, et pour tout $\mathcal{L}$-type (finitaire) $p \in S(A)$ il existe $\overline{a} \in M$ réalisant p tel que $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A P(M)$.

$(ii)_\epsilon$ Pour tout $A \subseteq M$ de la forme $A = \mathrm{acl}(\bar{b})$ pour un uplet $\bar{b}$ fini, et pour tout $\mathcal{L}$-type (finitaire) $p \in S(A)$ tel que p ne dévie pas au-dessus de $P(A)$, il existe $\bar{a} \in P(M)$ avec $\bar{a} \models p$.

Nous allons utiliser des idées de [Be04] pour reformuler la magnificence en terme de richesse. Pour cela, nous revenons à la fusion libre dans un contexte de fusion (T_0, T_1, T_2). Soit $(\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}, \leq^{\mathfrak{P}})$ la classe des paires $(A, P(A))$ de fusions avec $P(A) \leq A$, où $(B, P(P)) \leq^{\mathfrak{P}} (A, P(A))$ ssi $B \leq A$, $P(B) \leq P(A)$ et $B \mathop{\smile\hskip-0.9em\raise0.5ex\hbox{$|$}}^*_{P(B)} P(A)$. Notons que, pour l'instant, on n'a pas besoin de la simplicité des complétions de T_ω. En fait, on peut tout définir à l'aide de la $\mathop{\smile\hskip-0.9em\raise0.5ex\hbox{$|$}}^*$-indépendance. On pose

$$\mathcal{C}_0^{\mathfrak{P}} := \{(A, P(A)) \in \tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}} \mid A \in \mathcal{C}_0\}.$$

Suivant la terminologie de [Be04], on appelle $\leq^{\mathfrak{P}}$ une extension (un plongement) *libre*. Si $(B, P(B)) \leq^{\mathfrak{P}} (A, P(A)), (C, P(C))$ sont des paires de fusions, on peut choisir un amalgame libre $D = A \otimes_B C$ et définir $P(D) := \langle P(A)P(C)\rangle$ au sein de D. On effectue un calcul standard de $\mathop{\smile\hskip-0.9em\raise0.5ex\hbox{$|$}}^*$-indépendance pour vérifier que $P(D) = P(A) \otimes_{P(B)} P(C)$ et $(A, P(A)), (C, P(C)) \leq^{\mathfrak{P}} (D, P(D))$, ce qui montre la deuxième partie du lemme suivant. Quant à la première elle suit de 2.3.5.

Lemme 2.5.4. *(1) $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}$ est une classe élémentaire.*

(2) $(\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}, \leq^{\mathfrak{P}})$ (ainsi que $(\mathcal{C}_0^{\mathfrak{P}}, \leq^{\mathfrak{P}})$) a la propriété d'amalgamation (AP). $\square$

Définition 2.5.5. Un élément $(M, P(M)) \in \tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}$ est appelé une *paire riche de fusions* si $(M, P(M))$ est riche pour la classe $(\mathcal{C}_0^{\mathfrak{P}}, \leq^{\mathfrak{P}})$.

Avant d'arriver à l'égalité “paire riche=paire $\aleph_\epsilon$-magnifique”, nous allons montrer qu'une extension finiment engendrée dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}$ peut être obtenue comme suite d'extensions plus simples et faciles à décrire.

Définition 2.5.6. Soit $(B, P(B)) \leq^{\mathfrak{P}} (A, P(A))$ une extension libre dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}$.

- $(B, P(B)) \leq^{\mathfrak{P}} (A, P(A))$ est une *extension de base*, si $A = \langle BP(A)\rangle$. Une telle extension de base est *finiment engendrée / parasite / primitive / générique*, si $P(A)/P(B)$ l'est.
- On dit que $(B, P(B)) \leq^{\mathfrak{P}} (A, P(A))$ *ne change pas la base*, si $P(A) = P(B)$. Dans ce cas, l'extension est appelée *finiment engendrée / parasite / primitive / générique*, si A/B est une extension finiment engendrée / parasite / primitive / générique.

Soit $(B, P(B)) \leq^{\mathfrak{P}} (A, P(A))$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}$. Au sein de A, on trouve $A_\beta := \langle BP(A)\rangle = \mathrm{cl}_\omega(BP(A))$. Donc, $P(A_\beta) = P(A)$, et $(B, P(B)) \leq^{\mathfrak{P}} (A_\beta, P(A_\beta))$ est une extension de base, alors que $(A_\beta, P(A_\beta)) \leq^{\mathfrak{P}} (A, P(A))$ ne change pas la base. En utilisant le Lemme de décomposition 2.2.11 dans la classe $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$ et 2.2.12, on en déduit :

Lemme 2.5.7. *Soit $(B, P(B)) \leq^{\mathfrak{P}} (A, P(A))$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}$ avec A/B finiment engendrée. Alors il existe des fusions $A_0 = B \leq A_1 \leq \ldots \leq A_n = A$ telles que* *pour* $i = 1, \ldots, n-1$, $(A_i, P(A_i)) \leq (A_{i+1}, P(A_{i+1}))$ *est d'un des types suivants : extension de base primitive, extension de base générique, extension primitive qui ne change pas la base, extension générique qui ne change pas la base. On peut même les arranger de sorte qu'il existe* $r \leq n-1$ *tel qu'il s'agisse des extensions de base pour* $i \leq r$ *et des extensions qui ne changent pas la base pour* $i > r$. $\square$

Lemme 2.5.8. *Les paires riches de fusions sont exactement les paires* $\aleph_\epsilon$*-magnifiques (par rapport à* $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^*$*, bien entendu) de modèles de* T_ω*.*

Preuve. L'argument est similaire à la preuve de [Be04, Prop. 2.3].

Nous montrons d'abord que les riches sont $\aleph_\epsilon$-magnifiques. Soit $(M, P(M))$ une paire riche de fusions. Une variation de la preuve du Lemme 2.1.15 donne que $P(M) \preccurlyeq_{\mathcal{L}} M \models T_\omega$. Notons, cependant, que ce fait est automatiquement démontré dans la suite.

Montrons $(i)_\epsilon$. Soit $A = \mathrm{cl}_\omega(\overline{b})$, où $\overline{b} \in M$ est un uplet fini, et soit $p = \mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/A)$ (on rappelle le résultat 2.3.22 qui décrit les types dans T_ω).

Si $A \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^*_{P(A)} P(M)$ — c'est à dire $(A, P(A))$ n'est pas libre dans $(M, P(M))$ — il existe $\overline{b}' \in P(M)$ fini tel que $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^*_{P(A)\overline{b}'} P(M)$. Quitte à remplacer $(A, P(A))$ par $(\mathrm{cl}_\omega(A\overline{b}'), \mathrm{cl}_\omega(P(A)\overline{b}'))$ et p par une extension non-déviante à $\mathrm{cl}_\omega(A\overline{b}')$, on peut supposer que $(A, P(A)) \leq^{\mathfrak{P}} (M, P(M))$. Soit $A \leq N \models T_\omega$ avec $\overline{a} \in N$. On pose $A' := \mathrm{cl}_\omega(A\overline{a})$ et $P(A') := P(A)$. Alors, $(A, P(A)) \leq^{\mathfrak{P}} (A', P(A'))$, et par richesse on peut A-plonger librement $(A', P(A'))$ dans $(M, P(M))$. L'image $\overline{a}'' \in M$ de $\overline{a}$ sous ce plongement est une solution de p et satisfait $\overline{a}'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^*_A P(M)$ (car $P(A) = P(A')$ et le plongement est libre).

Quant à $(ii)_\epsilon$, on se donne $A = \mathrm{cl}_\omega(\overline{b}) \leq M$ comme avant, et soit $p = \mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/A)$ tel que $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^*_{P(A)} A$. Comme dans la preuve de $(i)_\epsilon$, on peut supposer que $(A, P(A)) \leq^{\mathfrak{P}} (M, P(M))$. Puis, on peut choisir $\overline{a} \in N \models T_\omega$ tel que $N \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^*_A P(M)$. On a donc (dans N) que $A' := \mathrm{cl}_\omega(A\overline{a})$ est un amalgame libre de A et $P(A') := \mathrm{cl}_\omega(P(A)\overline{a})$ au-dessus de $P(A)$, c'est à dire $(A, P(A)) \leq^{\mathfrak{P}} (A', P(A'))$. Comme $(M, P(M))$ est une paire riche de fusions, $(A', P(A'))$ se A-plonge librement dans $(M, P(M))$. L'image de $\overline{a}$ sous ce plongement est une solution de p dans $P(M)$.

Réciproquement, soit $(M, P(M))$ une paire $\aleph_\epsilon$-magnifique de modèles de T_ω. Soit $(A, P(A)) \leq^{\mathfrak{P}} (M, P(M))$ avec $(A, P(A)) \in \mathcal{C}_0^{\mathfrak{P}}$. Donc, $A = \mathrm{cl}_\omega(\overline{a})$ pour un $\overline{a} \subseteq_\omega M$. Puis, soit $(A, P(A)) \leq^{\mathfrak{P}} (A', P(A'))$ une extension libre dans $\mathcal{C}_0^{\mathfrak{P}}$. On doit montrer que $(A', P(A'))$ se A-plonge librement dans $(M, P(M))$. Par 2.5.7, on peut supposer que cette extension est une extension de base finiment engendrée ou une extension finiment engendrée qui ne change pas la base.

Dans le cas d'une extension de base, on choisit $\overline{a} \in P(A')$ fini avec $A' = \mathrm{cl}_\omega(A\overline{a})$. Comme $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^*_{P(A)} P(A')$, $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/A)$ ne dévie pas au-dessus de $P(A)$. Par $(ii)_\epsilon$, il existe $\overline{a}'' \in P(M)$ avec $\overline{a}'' \models p$. L'application $\overline{a} \mapsto \overline{a}''$ s'étend donc en un A-plongement fort de A'. Il est clair qu'un plongement fort de A' dans M est automatiquement libre, car il s'agit d'une extension de base.

Dans le cas d'une extension qui ne change pas la base, c'est la propriété $(i)_\epsilon$ qui fait tout. Soit $\overline{a} \in A'$ tel que $A' = \mathrm{cl}_\omega(A\overline{a})$. Alors, en utilisant $(i)_\epsilon$, on trouve

$\overline{a}'' \in M$ tel que $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}''/A) = \mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/A)$ et $\overline{a}'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{*}_{A} P(M)$. L'application $\overline{a} \mapsto \overline{a}''$ s'étend donc en un A-plongement libre de $(A', P(A'))$ dans $(M, P(M))$. $\square$

Remarque. *La preuve du Lemme 2.5.8 montre un peu plus : Une paire de fusions* $(M, P(M))$ *dans* $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}$ *satisfait à la condition* $(i)_\epsilon$ *ssi elle est riche pour les extensions qui ne changent pas la base, et elle satisfait à la condition* $(ii)_\epsilon$ *ssi elle est riche pour les extensions de base.* $\square$

Les composantes connexes de $(\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}, \leq^{\mathfrak{P}})$ sont précisément données par les composantes connexes de $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$. Évidemment, deux paires riches de fusions $(M, P(M))$ et $(N, P(N))$ ont la même $\mathcal{L}_P$-théorie ssi elles se trouvent dans la même composante connexe de $(\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mathfrak{P}}, \leq^{\mathfrak{P}})$. Dans ce cas, elles sont $(\mathcal{L}_P)_{\infty,\omega}$-équivalentes, car elles se correspondent par va-et-vient infini.

Voilà le lien avec les paires κ-magnifiques (toujours par rapport à $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{*}$) :

Lemme 2.5.9. *Soit* $(M, P(M))$ *une paire de fusions* $\aleph_\epsilon$*-magnifique, et* κ*-saturée en tant que* $\mathcal{L}_P$*-structure. Alors,* $(M, P(M))$ *est une paire* κ*-magnifique.*

Preuve. Clair. $\square$

Soit $T_\omega^{\mathfrak{P}}$ la théorie des paires $\aleph_\epsilon$-magnifiques de modèles de T_ω. Nous voulons axiomatiser cette $\mathcal{L}_P$-théorie. Soit $T_\omega^{\mathfrak{P}'}$ la $\mathcal{L}_P$-théorie suivante :

$T_\omega^{\mathfrak{P}'}(1)$: Si $(M, P(M))$ est un modèle de $T_\omega^{\mathfrak{P}'}(1)$, alors $P(M) \preccurlyeq_{\mathcal{L}} M \models T_\omega$.

$T_\omega^{\mathfrak{P}'}(2)$: Soit $\Psi = (\psi_1(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0), \psi_2(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0))$ une famille de paires de contrôle de dimension e et $\tau(\overline{x}, \overline{z}, \overline{y})$ une $\mathcal{L}$-formule existentielle à quantification bornée telle que $\models \tau(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ implique $\mathrm{d}(\overline{a}/\overline{b}\overline{c}) < e$. Alors, on met un axiome de la forme

$$\forall \overline{z}\overline{z}_0 \exists \overline{x} \forall \overline{y} \{[\theta_\Psi(\overline{z}, \overline{z}_0) \wedge \bigwedge_{i=0}^{m} y_i \in P]$$
$$\rightarrow [\psi_1(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0) \wedge \psi_2(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}_0) \wedge \neg\tau(\overline{x}, \overline{z}, \overline{y}) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} x_i \notin P]\}$$

$T_\omega^{\mathfrak{P}'}(3)$: Soit Ψ comme dans le schéma (2), $\tau(\overline{x}, \overline{z})$ existentielle à quantification bornée forçant $\mathrm{d}(\overline{x}/\overline{z}) < e$. Puis, pour $\overline{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \subseteq \tilde{x}$, $\overline{z}_0 \subseteq \tilde{z}_0$ et $\overline{z} = (z_0 \ldots, z_{k-1}) \subseteq \tilde{z}$, soit $\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_1(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0), \tilde{\psi}_2(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0))$ une autre famille de paires de contrôle (de dimension e), telle que $\models \tilde{\psi}_i \rightarrow \psi_i$ pour $i = 1, 2$, et $\tilde{a} \in \langle \overline{a}\tilde{b} \rangle$ dès que $\models \tilde{\psi}_1(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{b}_0) \wedge \tilde{\psi}_2(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{b}_0)$. Pour une telle situation, on met un axiome de la forme

$$\forall \tilde{z}\tilde{z}_0 \exists \tilde{x} \{[\theta_{\tilde{\Psi}}(\tilde{z}, \tilde{z}_0) \wedge \bigwedge_{i=0}^{k-1} z_i \in P]$$
$$\rightarrow [\tilde{\psi}_1(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0) \wedge \tilde{\psi}_2(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{z}_0) \wedge \neg\tau(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} x_i \in P]\}.$$

On observe que le schéma d'axiomes $T_\omega^{\mathfrak{P}'}(2)$ est une approximation de $(i)_\epsilon$, et que le schéma $T_\omega^{\mathfrak{P}'}(3)$ approxime la propriété $(ii)_\epsilon$.

Théorème 2.5.10. *Les théories $T_\omega^{\mathfrak{P}}$ et $T_\omega^{\mathfrak{P}'}$ coïncident. Plus précisément, sont équivalents pour $(M, P(M))$ une paire de fusions :*

(a) $(M, P(M))$ est une paire riche de fusions.

(b) $(M, P(M))$ est une paire $\aleph_\epsilon$-magnifique de modèles de T_ω.

(c) $(M, P(M))$ est un modèle $\aleph_\epsilon$-saturé de $T_\omega^{\mathfrak{P}'}$.

Preuve. L'équivalence (a) $\Longleftrightarrow$ (b) est le Lemme 2.5.8.

On vérifie que le schéma d'axiomes $T_\omega^{\mathfrak{P}'}(2)$ est une version approximative de $(i)_\epsilon$, tandis que $T_\omega^{\mathfrak{P}'}(3)$ est une version approximative de $(ii)_\epsilon$. Donnons l'argument concernant $T_\omega^{\mathfrak{P}'}(2)$ et la propriété $(i)_\epsilon$. Soit d'abord $(M, P(M))$ une paire de modèles de T_ω satisfaisant $(i)_\epsilon$. On montre que $(M, P(M)) \models T_\omega^{\mathfrak{P}'}(2)$. Pour cela, on considère une famille de paires de contrôle $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$, de dimension e, et $\tau(\overline{x}, \overline{z}, \overline{y})$ comme dans le schéma d'axiomes $T_\omega^{\mathfrak{P}'}(2)$, et on suppose que $M \models \theta_\Psi(\overline{b}, \overline{b}_0)$ pour des uplets $\overline{b}, \overline{b}_0 \in M$.

Par 2.3.13 on peut supposer que $\overline{b} \leq \langle \overline{b} \rangle =: k$ et $(k, P(k)) \leq^{\mathfrak{P}} (M, P(M))$, c'est à dire $k \leq M$ et $k \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{*}_{P(k)} P(M)$. Soit $p := \mathrm{tp}_\omega(\overline{a}'/k)$, où $\overline{a}'$ est une solution $\mathcal{L}_i$-générique de $\psi_i(\overline{x}, \overline{b}, \overline{b}_0)$ $(i = 1, 2)$ au-dessus de k, telle que $k \leq k\overline{a}' \leq \langle k\overline{a}' \rangle =: l'$ et l' est fortement k-plongée dans $K^* \succcurlyeq_{\mathcal{L}} M$. On applique $(i)_\epsilon$ au type $p \in S(k)$ pour trouver $\overline{a} \in M$ réalisant p tel que $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{*}_{k} P(M)$. Posons $l := \langle k\overline{a} \rangle = \mathrm{cl}_\omega(k\overline{a})$. Comme $k \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{*}_{P(k)} P(M)$, on a $l \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{*}_{P(k)} P(M)$, et donc, par la définition de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{*}$, $P(l) = l \cap P(M) = P(k)$ ainsi que $l \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{\mathrm{d}}_{P(k)} P(M)$. Le premier point donne que l'uplet $\overline{a}$ n'a pas de coordonnée dans P, et le deuxième point montre que $e = \mathrm{d}(\overline{a}/k) = \mathrm{d}(\overline{a}/kc_0, \ldots, c_{m-1})$ pour tout uplet $\overline{c} \in P(M)$ fini. L'axiome correspondant à Ψ et τ dans (2) est donc vrai dans $(M, P(M))$.

Réciproquement, soit $(M, P(M))$ une paire de modèles de T_ω satisfaisant $T_\omega^{\mathfrak{P}'}(2)$, telle que $(M, P(M))$ soit $\aleph_\epsilon$-saturé pour sa propre théorie. Soit $p \in S(k)$ avec $k \leq M$ finiment engendrée. Soit $\overline{a}' \in K^*$ une solution de p, et posons $l' := \mathrm{cl}_\omega(k\overline{a}')$. Il faut trouver $\overline{a} \in M$ tel que $\overline{a} \models p$ et $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{*}_{k} P(M)$. Or, nous montrons plus : on peut trouver une k-copie l de l' dans M, avec $l \leq M$ et $l \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{*}_{P(k)} P(M)$. Pour cela, il suffit que $l \models \mathrm{qftp}_\omega(l'/k)$, $P(l) = l \cap P(M) \subseteq P(k)$ (d'où $P(l) = P(k)$) et $l \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{\mathrm{d}}_{k} P(M)$). Or, les axiomes (2) montrent que le type décrit est finiment réalisable dans $(M, P(M))$. Par $\aleph_\epsilon$-saturation, on conclut.

L'argument concernant $T_\omega^{\mathfrak{P}'}(3)$ et la propriété $(ii)_\epsilon$ est plus facile, et nous l'omettons.

Nous avons alors montré que toute paire riche de fusions est un modèle de $T_\omega^{\mathfrak{P}'}$ et que tout modèle $\aleph_\epsilon$-saturé de $T_\omega^{\mathfrak{P}'}$ est une paire riche de fusions.

Finalement, il est facile de voir que si la paire $(K, P(K))$ est librement plongée dans $(M, P(M)) \models T_\omega^{\mathfrak{P}'}$, alors $K = \mathrm{acl}_{\mathcal{L}_P}(K)$ (on varie légèrement l'argument donné dans la preuve de 2.3.25). Avec cela, on montre l'$\aleph_\epsilon$-saturation d'une paire riche de fusions, ce qui termine la preuve. $\square$

Corollaire 2.5.11. *Supposons que la complétion T de T_ω est simple, et que la non-déviation dans T est donnée par $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^*$. (C'est par exemple le cas sous l'hypothèse* **A***.) Alors, on a :*

1. *La $\mathcal{L}$-théorie T a la* wnfcp.
2. *La $\mathcal{L}_P$-théorie $T^{\mathfrak{P}}$ est supersimple ($T^{\mathfrak{P}}$ est la théorie d'une paire riche de fusions dans la composante connexe de $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$ associée à T).*

Preuve. Comme $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^* = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}$ dans T par hypothèse, les paires κ-magnifiques par rapport à $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^*$ que nous avons étudiées sont les "vraies" paires κ-magnifiques, c'est à dire celles par rapport à la relation de non-déviation $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}$. Le corollaire suit donc du Fait 2.5.2, car $T^{\mathfrak{P}}$ est axiomatisable par le Théorème 2.5.10. □

2.6 Fusion libre et n-amalgamation

Dans cette section, nous considérons un contexte de fusion (T_0, T_1, T_2) avec T_i fortement minimale pour tout i, et nous obtenons des résultats divers de n-amalgamation. Entre autre, il sera montré que toute complétion de T_ω a la propriété de n-amalgamation de modèles (pour tout n).

On observe d'abord que dans ce contexte, l'hypothèse **A** est satisfaite par le Lemme 2.4.7. On peut alors appliquer le Théorème 2.4.10, ce qui montre que toute complétion de T_ω est supersimple dans ce cas, avec $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^*$ (On écrira toujours $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}$ dans la suite.) Puis, toute fusion est un modèle de $T_1 \cup T_2$, par 1.3.19. Par conséquent, le Théorème d'indépendance est valable au-dessus de tout ensemble cl_ω-clos, par le Corollaire 2.4.11 et 2.0.1. En particulier, comme $\mathrm{acl}_\omega = \mathrm{cl}_\omega$, on a $\mathrm{acl}^{eq}_\omega(A) = \mathrm{dcl}^{eq}_\omega(A)$ pour tout ensemble réel $A = \mathrm{cl}_\omega(A)$.

Nous renvoyons à la Section 1.2 pour les définitions et notations utilisées dans la suite.

Définition 2.6.1.
- Soit $S := (K_w)_{w \subseteq Y}$ un Y-système indépendant dans $M^* \models T_\omega$. Si, pour tout w, l'ensemble K_w est réel avec $K_w = \mathrm{cl}_\omega(K_w)$, on appelle S un *Y-système indépendant de fusions* .
- Un problème de n-amalgamation $p_w(x_w)_{w \in \mathcal{P}^-(\mathbf{n})}$ est un *problème de n-amalgamation de fusions* , si pour tout $i \in \mathbf{n}$ et tout $K_{\hat{\imath}} \models p_{\hat{\imath}}$, la famille $(K_w)_{w \subset \hat{\imath}}$ forme un $\hat{\imath}$-système indépendant de fusions. Si de plus $p_w(x_w)_{w \in \mathcal{P}^-(n)}$ est un problème de n-amalgamation borné, on l'appelle un *problème de n-amalgamation borné de fusions*

Lemme 2.6.2. *Soit $S = (K_w)_{w \subseteq Y}$ un Y-système indépendant de fusions dans $M^* \models T_\omega$. Supposons que $S\restriction_{\mathcal{L}_0} := (K_w \restriction \mathcal{L}_0)_w$ est un Y-système indépendant de modèles de T_0. Alors, $S\restriction_{\mathcal{L}_i}$ est un Y-système indépendant de modèles de T_i, pour $i = 1, 2$.*

Preuve. Clairement, K_w, A^S_w et B^S_w sont des ensembles autosuffisants dans M^*. Comme $K_w \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{A^S_w} B^S_w$ et $K_w \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^0_{A^S_w} B^S_w$, le Lemme 2.2.6 donne $K_w \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^i_{A^S_w} B^S_w$ pour $i = 1, 2$. □

Lemme 2.6.3. *Soit $p_w(x_w)_{w\in\mathcal{P}^-(\mathbf{n})}$ un problème de n-amalgamation de fusions dans (une complétion de) T_ω. On suppose que pour tout $i \in \mathbf{n}$, si $K_{\hat{\imath}} \models p_{\hat{\imath}}$, la famille $(K_w)_{w\subseteq\hat{\imath}}$ est un $\hat{\imath}$-système indépendant de modèles de T_0.*

Alors, le problème $(p_w)_w$ admet une solution.

Preuve. Soit $K_{\hat{\imath}} \models p_{\hat{\imath}}$. Alors, par le Lemme 2.6.2, $(K_w)_{w\subseteq\hat{\imath}}$ est un $\hat{\imath}$-système indépendant de modèles de T_1 et T_2. On choisit une solution $K^1_{\mathbf{n}} \models T_1$ du problème de n-amalgamation de modèles de T_1 donné par $(p_w\restriction\mathcal{L}_1)_{w\in\mathcal{P}(n)}$, de même $K^2_{\mathbf{n}} \models T_2$ pour le problème $(p_w\restriction\mathcal{L}_2)_{w\in\mathcal{P}(n)}$ (ces solutions existent par 1.2.7.(1)).

Alors $K^1_{\mathbf{n}}\restriction\mathcal{L}_0$ et $K^2_{\mathbf{n}}\restriction\mathcal{L}_0$ sont des solutions du problème de n-amalgamation de modèles de T_0 donné par $(p_w\restriction\mathcal{L}_0)_{w\in\mathcal{P}(n)}$. Le Fait 1.2.7,(2) nous dit qu'une telle solution est essentiellement unique, c'est à dire que si nous posons $q_i := \mathrm{tp}_{\mathcal{L}_i}((\bigcup x_{\hat{\jmath}})^{K^i_{\mathbf{n}}})$, pour $i = 1, 2$, alors $q_1\restriction\mathcal{L}_0 = q_2\restriction\mathcal{L}_0$. Il suffit d'appliquer le Lemme 2.1.5 pour obtenir $K_{\mathbf{n}} = \mathrm{cl}_\omega(K_{\mathbf{n}}) \subseteq M^* \models T_\omega$ contrôlé par $C_{\mathbf{n}} \models q_1 \cup q_2$. Ce $K_{\mathbf{n}}$ est une solution du problème $p_w(x_w)_{w\in\mathcal{P}^-(n)}$. $\square$

Nous allons montrer que les hypothèses du Lemme 2.6.3 sont vérifiées dans deux cas : quand T_0 est triviale (la démonstration est "triviale") et quand nous considérons un problème de n-amalgamation borné.

Lemme 2.6.4. *Si T_0 a une prégéométrie triviale, tout système indépendant de fusions dans T_ω est un système indépendant de modèles de T_0.*

Preuve. Soit $S = (K_w)_{w\subseteq Y}$ un Y-système indépendant de fusions dans T_ω. Pour tout $w' \not\supseteq w$, on a $M_w \cap M_{w'} = M_{w\cap w'} \subseteq A^S_w$, et donc $M_w \cap B^S_w \subseteq A^S_w$ (en fait, on a égalité). Or, $B^S_w = \mathrm{acl}_0(B^S_w)$, par la trivialité de T_0, et on a donc $M_w \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^0_{A^S_w} B^S_w$. $\square$

On combine 2.6.4 et 2.6.3 pour obtenir le résultat suivant :

Proposition 2.6.5. *Soit T_ω la théorie de la fusion libre dans le contexte de fusion fortement minimal (T_0, T_1, T_2), où T_0 a une prégéométrie triviale. Alors, tout problème de n-amalgamation de fusions dans T_ω admet une solution.* $\square$

Lemme 2.6.6. *Soient $M^* \models T_\omega$ et $(K_w)_{w\subseteq Y}$ un Y-système indépendant borné de fusions dans M^*.*

Alors, $(K_w)_{w\subseteq Y}$ est un Y-système indépendant de modèles de T_0.

Preuve. Pour $w \neq \emptyset$, on pose $K^0_w := \bigcup_{i\in w} K_{\{i\}}$, et soit $K^0_\emptyset := K_\emptyset$. Puis, on pose $K^1_w := \mathrm{acl}_1(K^0_w)$, $K^2_w := \mathrm{acl}_2(K^1_w)$, et on continue, c'est à dire $K^{2m+1}_w := \langle K^0_w\rangle^{2m+1}_1$ et $K^{2m+2}_w := \langle K^0_w\rangle^{2m+2}_2$. Par induction sur k, on établira :

$(*)_k$ $S^k := (K^k_w)_{w\subseteq Y}$ est un Y-système $\mathcal{L}_i$-indépendant dans $M^*\restriction\mathcal{L}_i \models T_i$, pour $i = 0, 1, 2$.

Suite au fait que $(K_{\{i\}})_{0\le i\le n-1}$ forme une suite indépendante de fusions fortement plongées dans M^*, on a

(1) Une réunion quelconque d'ensembles du type K_w^k est autosuffisante dans M^*. En particulier, c'est le cas pour $A_w^k := A_w^{S^k}$ et $B_w^k := B_w^{S^k}$.

En outre, comme S est borné et chaque suite $(K_w^k)_k$ est une filtration de K_w, on a aussi

(2) $\langle \bigcup_{y \in w} K_{\{y\}} \rangle = \langle K_w \rangle = K_w = \bigcup_k K_w^k$ pour tout $w \neq \emptyset$.

Il suffit de montrer $(*)_k$ pour tout k, et alors la démonstration du lemme est complète. Cela suit de (2), une fois qu'on a noté la chose suivante : Si $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}, (Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des suites d'ensembles croissantes dans une théorie supersimple arbitraire, telles que $X_k \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{Y_k} Z_k$ pour tout k, alors on a $\bigcup X_k \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bigcup Y_k} \bigcup Z_k$ aussi.

Prouvons $(*)_k$ par induction sur k. Pour cela, il faut montrer $M_w^k \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{i}_{A_w^k} B_w^k$ pour tout $w \neq \emptyset$ et $i = 0, 1, 2$. Pour $k = 0$, c'est évident. On suppose que $(*)_k$ est vrai. On traite le cas où $k = 2m$ est pair (le cas impair s'obtient en échangeant les rôles de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$). On a $K_w^{k+1} = \mathrm{acl}_1(K_w^k)$ pour tout w, d'où $A_w^k \subseteq A_w^{k+1} \subseteq \mathrm{acl}_1(A_w^k)$ et $B_w^k \subseteq B_w^{k+1} \subseteq \mathrm{acl}_1(B_w^k)$.

Comme $K_w^k \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{1}_{A_w^k} B_w^k$ par hypothèse d'induction, on a $K_w^{k+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{1}_{A_w^{k+1}} B_w^{k+1}$, et S^{k+1} est un Y-système indépendant de modèles de T_1.

Le système S^{k+1} est donc également un Y-système indépendant de modèles de T_0, par le Lemme 1.2.4, et alors $K_w^{k+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{A_w^{k+1}} B_w^{k+1}$.

Si $|w| = 1$, c'est à dire $w = \{y\}$ pour un $y \in Y$, alors $A_{\{y\}}^{k+1} = K_\emptyset$ et $B_{\{y\}}^{k+1} \subseteq K_{\hat{y}}$, et donc $K_{\{y\}}^{k+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{2}_{A_{\{y\}}^{k+1}} B_{\{y\}}^{k+1}$ suit de $K_{\{y\}} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{K_\emptyset} K_{\hat{y}}$ — puisque S est un Y-système ($\mathcal{L}$-)indépendant.

Considérons un w contenant au moins 2 éléments. On a $K_w^{k+1} \subseteq \langle A_w^{k+1} \rangle$. Les ensembles A_w^{k+1}, B_w^{k+1}, K_w^{k+1} et $K_w^{k+1} B_w^{k+1}$ sont autosuffisants dans M^* par (1). Les hypothèses du Lemme 2.2.6 sont alors satisfaites pour K_w^{k+1}, A_w^{k+1} et B_w^{k+1}. Par ce lemme, $K_w^{k+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{A_w^{k+1}} B_w^{k+1}$ entraîne $K_w^{k+1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{2}_{A_w^{k+1}} B_w^{k+1}$. Cela montre $(*)_{k+1}$. □

Théorème 2.6.7. *On suppose que T_1 et T_2 sont fortement minimales. Soit T une complétion de T_ω. Alors, tout problème de n-amalgamation borné de fusions (dans T) admet une solution.*

Preuve. On combine le Lemme 2.6.6 avec le Lemme 2.6.3. □

Remarque. *Si T_ω éliminait les imaginaires, le Théorème 2.6.7 dirait précisément que T_ω a la propriété de n-amalgamation pour tout n. Or, en général T_ω n'élimine pas les imaginaires (et nous ne les avons pas classifiés), et le statut de cette propriété reste ouverte.*

Pour pouvoir montrer le théorème suivant, nous avons besoin de quelques résultats du Chapitre 3. Nous reportons donc la preuve à ce chapitre (voir page 68).

Théorème 2.6.8. *Si T_1 et T_2 sont fortement minimales, toute complétion de T_ω a la proriété de n-amalgamation de modèles pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Chapitre 3

Fusion libre ω-stable et collapse

Dans ce chapitre, nous étudions un contexte de fusion (T_0, T_1, T_2) où les théories T_i sont fortement minimales. Nous présenterons un cadre (3.1.1) dans lequel T_ω est complète et ω-stable, avec un seul type d-générique $\mathfrak{g}$. Dans la Section 3.2, nous faisons une étude fine de T_ω, et nous obtenons un résultat de coordinatisation uniforme des types parasites par des types fortement minimaux localement finis. Ensuite, la théorie des enveloppes affines (Section 3.3 nous amène à un collapse de T_ω dans un cas très particulier (contexte de fusion abélien, où les théories T_i sont données par des groupes monobasées). Enfin, nous montrons dans la Section 3.5 des résultats généraux de collapse.

Pour obtenir une théorie T_ω avec les propriétés cherchées, il sera nécessaire de renforcer le Théorème 2.3.22. Nous donnons d'abord des exemples. Le premier apparaît dans [Hr92], et il montre que l'on ne peut pas espérer pouvoir trouver une fusion fortement minimale dans tout contexte de fusion avec T_i fortement minimale, même dans le cas où T_0 a une prégéométrie triviale. Le deuxième exemple est une variation du premier, suffisamment compliqué pour qu'aucune complétion de $T_1 \cup T_2$ ne soit stable.

Exemples 3.0.1. (1) Soient $G_1 := \mathbb{Z}/4$, $G_2 := \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, et soit T_i la théorie d'une opération libre de G_i sur un ensemble infini, dans le langage $\mathcal{L}_i$ qui consiste en des symboles de fonctions pour les éléments de G_i. On prend T_0 comme la théorie d'une relation d'équivalence E, chaque classe comportant 4 éléments, dans $\mathcal{L}_0 := \{E\}$. Les expansions $T_0 \subseteq T_i$ sont données par : $E(x, y)$ si et seulement si $y = g \cdot x$ pour un $g \in G_i$.

Il est facile de voir que toute complétion de T_ω est superstable dans ce contexte de fusion (plus généralement, c'est vrai pour tout contexte de fusion (T_0, T_1, T_2) où T_i est fortement minimale triviale pour tout i). Par contre, on montrera : aucun $M \models T_1 \cup T_2$ ne peut être superstable avec un unique type de rang U maximal, en particulier il n'existe pas de fusion fortement minimale de T_1 et T_2 au-dessus de T_0.

On raisonne par l'absurde. Supposons que $M \models T_1 \cup T_2$ soit superstable avec un unique type de rang U maximal $< \infty$ (au-dessus de M, par exemple). Soit $a \in G_1$ un élément d'ordre 4. Pour x générique on a $a \cdot x = c \cdot x$ pour un certain $\mathrm{id} \neq c \in G_2$ avec $c^2 = \mathrm{id}$, car $E(a \cdot x, x)$ et $x \neq a \cdot x$. Comme $a \cdot x$ est générique aussi, on est amené à la contradiction suivante : $x \neq a^2 \cdot x = c \cdot (a \cdot x) = c^2 \cdot x = x$.

Un lecteur attentif dira que cet exemple n'entre pas dans notre cadre ($\mathrm{acl}_i(\emptyset)$ n'est pas infini, pour $i = 1, 2$.) Pour l'adapter, il suffit de nommer un modèle premier des théories T_1 et T_2. Nous observons qu'il est possible de modifier cet exemple de manière à ce que les expansions $T_0 \subseteq T_i$ renforcent la prégéométrie : il suffit de remplacer T_i par la théorie d'une G'_i-opérations libres, pour G'_i strictement contenant G_i.

(2) Soit T_0 la théorie d'une relation d'équivalence E, avec une infinité de classes à 4 éléments, sauf une classe exceptionnelle contenant un seul élément 0,
$T_1 := \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_5}$, l'expansion étant donnée par : Exy ssi $x = \alpha y$ pour un $\alpha \in \mathbb{F}_5^* = \{1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3\}$ (pour $\lambda = 2$, par exemple),
$T_2 :=$ théorie d'une opération de $G_2 = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 = \{1, c, d, cd\}$ agissant trivialement sur 0 et librement sur le complément de $\{0\}$. Comme dans (1), on trouve T_0 comme réduit via Exy ssi $x = g \cdot y$ pour un $g \in G_2$.

On montre qu'aucune complétion de $T_1 \cup T_2$ n'est stable. Car supposons que $M \models T_1 \cup T_2$ soit stable. En particulier, c'est un groupe stable Γ pour l'addition dans l'espace vectoriel donné par T_1, avec composante connexe Γ^0. Soit x générique dans Γ^0. Comme la multiplication avec λ est un automorphisme définissable de Γ, l'élément λx est générique dans Γ^0 aussi, c'est à dire $\mathrm{tp}(x) = \mathrm{tp}(\lambda x)$. En particulier, si $\lambda x = c \cdot x$ (par exemple), alors $\lambda(\lambda x) = c \cdot (\lambda x)$ aussi. Comme dans l'exemple (1), on arrive à une contradiction : $x \neq \lambda^2 x = \lambda(\lambda x) = c \cdot (\lambda x) = c \cdot (c \cdot x) = c^2 \cdot x = x$.

Voilà la notion qui exclura ce genre d'exemples :

Définition 3.0.2. Le contexte de fusion (T_0, T_1, T_2) (avec T_i fortement minimale) a un *bon contrôle* si la condition suivante est satisfaite :

Pour tout $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et tout $A \subseteq K$ contrôlant K, le $\mathcal{L}$-type d'isomorphisme de K est complètement déterminé par $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(A)$.

Comme nous sommes à la recherche de sources de bon contrôle, donnons encore une autre définition :

Définition 3.0.3. Soit $T_0 \subseteq T_1$ une expansion fortement minimale. On dit que cette expansion *préserve les multiplicités* si pour tout $\overline{a} \in \mathrm{acl}_0(\overline{b})$ on a $\mathrm{mult}_1(\overline{a}/\overline{b}) = \mathrm{mult}_0(\overline{a}/\overline{b})$.

Remarque 3.0.4.

(1) Si $\mathrm{acl}_0 = \mathrm{dcl}_0$*, alors toute expansion de* T_0 *préserve les multiplicités.*

(2) Si l'expansion $T_0 \subseteq T_1$ *fortement minimale préserve les multiplicités, alors* $\mathrm{RDM}_1(\varphi_0(\overline{x}, \overline{b})) = \mathrm{RDM}_0(\varphi_0(\overline{x}, \overline{b}))$ *pour toute formule* $\mathcal{L}_0$*-définissable* $\varphi_0(\overline{x}, \overline{b})$*.*

(3) Supposons que $T_0 \subseteq T_1$ soit une expansion fortement minimale préservant les multiplicités, et que cette expansion soit essentielle (cf. 1.3.15). Alors, quitte à ajouter des constantes au langage $\mathcal{L}_1$, $T_0 \subseteq T_1$ renforce la prégéométrie.

Preuve. Nous travaillons au-dessus du modèle saturé dénombrable $M \models T_1$.

(1) est clair. Pour montrer (2), on rappelle d'abord que pour toute expansion fortement minimale on a l'égalité correspondante pour les rangs de Morley (cf. 1.3.18). Puis, on observe :

($*$) Soit $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ un ensemble définissable dans une théorie fortement minimale et M un modèle de cette théorie contenant $\overline{b}$. Puis, soit $\overline{x} = \overline{x}_1\overline{x}_2$ tel que l'image de la projection de $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ sur les $\overline{x}_1$-coordonnées soit un ensemble générique et cette projection soit à fibres finies (partout). Alors, $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ est irréductible ($\mathrm{DM}(\varphi(\overline{x}, \overline{b})) = 1$) ssi pour tout $\overline{a} = (\overline{a}_1, \overline{a}_2)$ générique dans $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ au-dessus de M, on a $\#\varphi(\overline{a}_1, \overline{x}_2, \overline{b}) = \mathrm{mult}(\overline{a}_2/\overline{a}_1 M)$, où $\#\varphi(\overline{a}_1, \overline{x}_2, \overline{b})$ dénote la cardinalité de la fibre au-dessus de $\overline{a}_1$.

L'argument pour établir ($*$) ainsi que la preuve de (2) à partir de ($*$) sont faciles et laissés au lecteur.

Quant à (3), par essentialité de l'expansion, il existe une $\mathcal{L}_1$-formule $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ (avec $\overline{b} \in M$) telle qu'aucune $\mathcal{L}_0$-formule ne lui soit équivalente. On choisit une telle formule $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ de RDM_1 minimal. Clairement, $\mathrm{DM}_1(\varphi(\overline{x}, \overline{b})) = 1$ et $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ est infinie (disons de rang de Morley n). Soit $\overline{a} = \overline{a}_1\overline{a}_2$ générique dans $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ au-dessus de M, tel que $\overline{a}_1$ soit $\mathcal{L}_1$-indépendant et $\overline{a}_2 \in \mathrm{acl}_1(M\overline{a}_1)$. Montrons que $\overline{a}_2 \subsetneq \mathrm{acl}_0(M\overline{a}_1)$: sinon, on peut choisir une $\mathcal{L}_0(M)$-formule $\psi_0(\overline{x}, \overline{b}_0)$ qui isole $\mathrm{tp}_0(\overline{a}/M)$ parmi tous les $\mathcal{L}_0$-types de rang de Morley $\geq n$. Par (2), on aurait $\mathrm{RDM}_1(\psi_0(\overline{x}, \overline{b}_0)) = \mathrm{RDM}_0(\psi_0(\overline{x}, \overline{b}_0)) = (n, 1)$, et $\varphi(\overline{x}, \overline{b})\Delta\psi_0(\overline{x}, \overline{b}_0)$ donnerait un ensemble $\mathcal{L}_1$-définissable non-$\mathcal{L}_0$-définissable d'un rang plus petit que n, ce qui contredirait la minimalité de $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$.

On termine la preuve de (3), si on établit les deux faits suivants :

(+) Il existe $M' \models T_1$ tel que si $\mathrm{d}_1(a/M') = 1$, alors $\mathrm{acl}_1(M'a) \supsetneq \mathrm{acl}_0(M'a)$.

(++) Si M' satisfait (+) et $M' \preccurlyeq M'' \models T_1$, alors M'' satisfait (+) aussi.

On pose $M_0 := M$, et $M_i := \mathrm{acl}_1(Ma_{11} \dots a_{1i})$ pour $i = 1 \dots, n$. Comme $\mathrm{acl}_0(M\overline{a}_1) \subsetneq \mathrm{acl}_1(M\overline{a}_1)$, il existe $i \leq n$ tel que $\mathrm{acl}_0(M_{i-1}a_{1i}) \subsetneq \mathrm{acl}_1(M_{i-1}a_{1i}) = M_1$. Cela montre (+).

Supposons que M' satisfait (+). Soit $M' \preccurlyeq M''$ et a avec $\mathrm{d}_1(a/M'') = 1$. Comme $M' \models T_1$, $\mathrm{acl}_1(M'a) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{1}_{M'} M''$ entraîne $\mathrm{acl}_1(M'a) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{0}_{M'} M''$. On en déduit que $\mathrm{d}_0(\mathrm{acl}_1(M''a)/M'') \geq \mathrm{d}_0(\mathrm{acl}_1(M'a)/M'') = \mathrm{d}_0(\mathrm{acl}_1(M'a)/M') \geq 2$. Le modèle M'' satisfait donc également (+). $\square$

Remarque. *Il est montré dans [Hr92] que toute expansion fortement minimale $T \supseteq ACF_p$ préserve les multiplicités.*

Lemme 3.0.5. *Si l'une des expansions $T_0 \subseteq T_i$ préserve les multiplicités, alors (T_0, T_1, T_2) a un bon contrôle.*

Preuve. On peut supposer que $T_0 \subseteq T_1$ préserve les multiplicités. Soit $\iota : A \cong A'$ un $\mathcal{L}$-isomorphisme, où A contrôle K et A' contrôle K', pour $K, K' \in \tilde{\mathcal{C}}$. Par induction, il suffit de montrer que ι s'étend en un $\mathcal{L}$-isomorphisme $\tilde{\iota} : \mathrm{acl}_i(A) \cong \mathrm{acl}_i(A')$, pour $i = 1, 2$.

Montrons d'abord que $\mathrm{acl}_0(A) \cong_{\mathcal{L}} \mathrm{acl}_0(A')$. Il suffit de choisir une application $\mathcal{L}_2$-élémentaire quelconque $\tilde{\iota} : \mathrm{acl}_0(A) \cong \mathrm{acl}_0(A')$ qui étend ι (pour l'obtenir, on utilise l'élimination des quanteurs dans T_2 pour construire un $\mathcal{L}_2$-isomorphisme $\iota_2 : \mathrm{acl}_2(A) \cong \mathrm{acl}_2(A'$ que l'on restreint ensuite à $\mathrm{acl}_0(A)$)). Trivialement, $\tilde{\iota}$ est $\mathcal{L}_0$-élémentaire, aussi. Comme $T_0 \subseteq T_1$ préserve les multiplicités, tout $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_0}(\mathrm{acl}_0(A)/A)$ est $\mathcal{L}_1$-élémentaire, aussi. Donc, $\tilde{\iota}$ est un $\mathcal{L}$-isomorphisme.

Traitons le cas acl_1. Soit $\iota_1 : \mathrm{acl}_1(A) \cong \mathrm{acl}_1(A')$ un $\mathcal{L}_1$-isomorphisme auxiliaire étendant ι, et soit B une $\mathcal{L}_0$-base de $\mathrm{acl}_1(A)$ au-dessus de A. Posons $B' := \iota_1(B) \subseteq \mathrm{acl}_1(A')$. Comme $A \leq \mathrm{acl}_1(A)$, on a $\mathrm{d}_2(\bar{b}/A) = \mathrm{d}_0(\bar{b}/A)$ pour tout $\bar{b} \subseteq_\omega B$, et B est donc $\mathcal{L}_2$-indépendant au-dessus de A (c'est vrai également pour B' au-dessus de A'). Cela montre que $\iota_1 \restriction_{AB} : AB \cong A'B'$ est un $\mathcal{L}$-isomorphisme qui étend ι. Par la première partie de la preuve, le cas acl_1 est alors terminé.

Le fait que ι s'étende en un $\mathcal{L}$-isomorphisme $\mathrm{acl}_2(A) \cong \mathrm{acl}_2(A')$ se montre de manière semblable (ce cas est même plus facile, car tout $\mathcal{L}_2$-isomorphisme étendant ι est un $\mathcal{L}_1$-isomorphisme aussi). □

3.1 Les riches sous bon contrôle

À partir de maintenant, et jusqu'à la fin du Chapitre 3, on garde les hypothèses suivantes concernant le contexte de fusion (T_0, T_1, T_2) :

Contexte 3.1.1.
- T_i est fortement minimale.
- $T_0 \subseteq T_i$ renforce la prégéométrie ($i = 1, 2$), c'est à dire pour tout $A \subseteq M \models T_i$ et tout $a \in M$ avec $\mathrm{d}_i(a/A) = 1$ on a $\mathrm{acl}_0(Aa) \subsetneq \mathrm{acl}_i(Aa)$.
- (T_0, T_1, T_2) a un bon contrôle.
- Les hypothèses 2.0.1 sur les langages $\mathcal{L}_i$.

Un contexte de fusion satisfaisant à ces hypothèses est appelé un *contexte de fusion fortement minimal*.

L'hypothèse que les expansions renforcent la prégéométrie nous sert à exclure des contextes de fusions qui sont dégénérés dans un certain sens, et nous évitons alors des distinctions de cas inintéressants. Notons que sous ces hypothèses, tout $K \in \tilde{\mathcal{C}}$ est modèle de $T_1 \cup T_2$ (par 1.3.19), car K est infini.

Le lemme suivant suit facilement :

Lemme 3.1.2. *On a l'unicité de l'amalgame libre dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$.* □

Lemme 3.1.3. *La classe $\mathcal{C}_0$ est dénombrable, ainsi que (le nombre de classes d'isomorphisme dans) $\{k \leq l \mid l \in \mathcal{C}_0\}$, pour tout $k \in \mathcal{C}_0$.*

Preuve. Toute fusion $k \in \mathcal{C}_0$ est contrôlée par un uplet fini $\bar{b}$. Il suffit de choisir $\bar{b}_0$ fini avec $k = \langle \bar{b}_0 \rangle$, et $\bar{b} := \mathrm{cl}_0(\bar{b}_0)$ est fini et contrôle k. Or, dans T_1 et T_2

il n'existe qu'un nombre dénombrable de types d'uplets finis au-dessus de $\emptyset$, et donc $\mathcal{C}_0$ est dénombrable par l'hypothèse de bon contrôle ($\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{b})$ détermine k à $\mathcal{L}$-isomorphisme près).

Maintenant, on fixe $k \in \mathcal{C}_0$. Soit $k \leq l \in \mathcal{C}_0$ et $\overline{a}/\overline{b}$ une paire de contrôle pour cette extension de fusions. On choisit $\overline{b}_i \in \mathrm{acl}_i(\overline{b})$ tel que $\mathrm{tp}_i(\overline{a}/\overline{b}\overline{b}_i)$ soit stationnaire. Alors, $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}\overline{b}\overline{b}_1\overline{b}_2)$ détermine complètement $k \leq l$, dans le sens suivant : Soit l' contôlée par $\overline{a}'\overline{b}'\overline{b}_1'\overline{b}_2'$ avec $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}'\overline{b}'\overline{b}_1'\overline{b}_2') = \mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}\overline{b}\overline{b}_1\overline{b}_2)$ et soit $k' = \langle \overline{b}' \rangle$ contrôlée par $\overline{b}'$, alors tout $\mathcal{L}$-isomorphisme entre k et k' qui étend $\overline{b}'\overline{b}_1'\overline{b}_2' \mapsto \overline{b}\overline{b}_1\overline{b}_2$ s'étend en un $\mathcal{L}$-isomorphisme de l avec l' qui envoie $\overline{a}$ sur $\overline{a}'$. Cela montre que $\{k \leq l \mid l \in \mathcal{C}_0\}$ est dénombrable. $\square$

Corollaire 3.1.4. *Il existe une fusion riche dénombrable $M_\omega \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ qui est unique à isomorphisme près, la limite de Fraïssé de $(\mathcal{C}_0, \leq)$. Deux fusions riches sont $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalentes. En particulier, T_ω est complète.*

Preuve. La classe $(\mathcal{C}_0, \leq)$ est connexe, car le type de $\mathcal{L}$-isomorphisme de $k_0 := \langle \emptyset \rangle \in \mathcal{C}_0$ est uniquement déterminé, par bon contrôle, et k_0 se plonge donc (fortement) dans toute fusion. Le Lemme 3.1.3 permet une construction usuelle à la Fraïssé pour obtenir une fusion riche dénombrable (c'est plus facile que dans la preuve de la Proposition 2.1.14). Nous terminons donc la preuve par la Proposition 2.1.14, une fois que nous avons noté que deux structures dénombrables et $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalentes sont isomorphes. $\square$

La théorie T_ω est axiomatisable par le Théorème 2.3.14, et cela à l'aide des axiomes décrits dans le Corollaire 2.3.19. Le théorème suivant est un corollaire de 2.3.22, par bon contrôle.

Théorème 3.1.5. *Soient $\overline{a} \leq K \models T_\omega$ et $\overline{a}' \leq K' \models T_\omega$, et supposons que $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}')$. Alors, $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}) = \mathrm{tp}_\omega(\overline{a}')$ (les uplets peuvent être infinis).*

En particulier, pour $A \subseteq K$, $A' \subseteq K'$ on a $\mathrm{tp}_\omega(A) = \mathrm{tp}_\omega(A')$ si et seulement si $\mathrm{cl}_0(A) \cong_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_0(A')$. $\square$

Lemme 3.1.6. *Soient $\overline{a} \in K \models T_\omega$ et $B \subseteq K$, avec $\mathrm{d}(\overline{a}/B) = 0$. On suppose que $k := \mathrm{cl}_\omega(B)$ est finiment engendrée. Alors $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/B)$ est isolé.*

Preuve. Il suffit de traiter le cas où $B = \mathrm{cl}_\omega(B) =: k$. Puis, quitte à agrandir $\overline{a}$, on peut supposer qu'il existe $\overline{b} \in k$ tel que $\overline{a}/\overline{b}$ soit une paire de contrôle pour l/k, où $l := \mathrm{cl}_\omega(k\overline{a})$. On montre d'abord que $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/\overline{b})$ est isolé. Pour cela, on choisit des $\mathcal{L}_i$-formules $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b})$ telles que $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}_i}(\overline{a}/\overline{b})$ soit le seul type générique dans $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b})$ au-dessus de $\overline{b}$ et $\varphi_0(\overline{x}, \overline{b})$ isole $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}_0}(\overline{a}/\overline{b})$. Le fait que $\bigwedge_{i=0}^2 \varphi_i(\overline{x}, \overline{b})$ isole $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/\overline{b})$ suit du Théorème 3.1.5, comme $\overline{b} \leq K$ et $\delta(\overline{a}/\overline{b}) = 0$.

Ensuite, notons que pour tout $\overline{a}' \models \mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/\overline{b})$ on a $\overline{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\,^i_{\overline{b}} k$ pour $i = 0, 1, 2$. C'est le cas pour $\overline{a}' = \overline{a}$ (par définition d'une paire de contrôle), et donc pour tout $\overline{a}'$, car $k = \mathrm{acl}_\omega(\overline{b})$. Maintenant, il suffit de choisir un $\overline{b} \subseteq \overline{b}' \subseteq_\omega k$ avec $\mathrm{Cb}_i(\overline{a}/k) \in \mathrm{dcl}_i(\overline{b}')$ et des $\mathcal{L}_i$-formules $\varphi_i'(\overline{x}, \overline{b}') \in \mathrm{tp}_i(\overline{a}/\overline{b}')$ génériquement contenues dans $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b})$ et de degré de Morley 1 pour que $\bigwedge_{i=0}^2 \varphi_i'(\overline{x}, \overline{b}')$ isole $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/k)$, par le Théorème 3.1.5. $\square$

À partir de maintenant, on travaille dans un modèle monstre $K^* \models T_\omega$.

Lemme 3.1.7. *T_ω est superstable (avec $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^* = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$).*

Preuve. On peut montrer ce lemme en comptant des types (utilisant 3.1.5). Or, nous savons déjà que T_ω est supersimple avec $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} = \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^*$ (par le Thórème 2.4.10, l'hypothèse **A** étant satisfaite dans notre contexte). Il suffit donc de montrer que tout type au-dessus d'un ensemble cl_ω-clos K est stationnaire, c'est à dire n'a qu'une seule extension non-déviante (au sens de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^*$) à tout $K' \supseteq K$. Soit donc $K = \mathrm{cl}_\omega(K) \leq K^*$ et $\overline{\alpha} \in K^*$. Il suffit de montrer que $\mathrm{tp}_\omega(\mathrm{cl}_\omega(K\bar{\alpha})/K)$ n'a qu'une seule extension non-déviante à tout $K \subseteq K' = \mathrm{cl}_\omega(K')$. Or, cela est une conséquence de l'unicité de l'amalgame libre 3.1.2 et de 3.1.5, compte tenu de la caractérisation de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,^*$ donnée dans 2.4.2. $\square$

La preuve précédente montre :

Lemme 3.1.8. *Soit $K = \mathrm{cl}_\omega(K) \leq K^*$. Alors tout type (réel) au-dessus de K est stationnaire.* $\square$

Comme dans le cas supersimple (Théorème 2.4.10), on obtient $\mathrm{U}(L/K) = 1$, si $K \leq L$ est une extension primitive et $K \leq K^*$. Pour L/K parasite, $\mathrm{U}(L/K)$ vaut la longueur d'une décomposition en extensions primitives. Nous voulons montrer que si $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/K)$ est parasite (c'est à dire $L := \mathrm{cl}_\omega(K\overline{a})$ est une extension parasite de K), alors $\mathrm{U}(\overline{a}/K) = \mathrm{RM}(\overline{a}/K)$. Par induction sur $n = \mathrm{U}(\overline{a}/K)$ et utilisant le fait que $\mathrm{U}(q) \leq \mathrm{RM}(q)$ est toujours vrai, il suffit de montrer que pour tout type parasite $p = \mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/K^*)$ il existe une formule $\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \in p$ qui isole p parmi tous les types $q \in S(K^*)$ avec $\mathrm{U}(q) \geq \mathrm{U}(p)$.

On choisit $k = \mathrm{cl}_\omega(k) \leq K^*$ finiment engendrée telle que $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_k K^*$. Alors $p_0 := \mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/k)$ est isolé par une formule $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$, par le Lemme 3.1.6. Comme p_0 est stationnaire (par 3.1.8), tout type $q \in S(K^*)$ contenant $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ est ou bien égal à p ou bien une extension déviante de p_0. En particulier, si $q \neq p$ et q contient $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$, alors $\mathrm{U}(q) < \mathrm{U}(p)$.

Le seul 1-type que nous n'avons pas traité ainsi (par 3.1.5), c'est le *type générique* $\mathfrak{g} := \mathrm{tp}_\omega(a/\emptyset)$, pour a avec $\mathrm{d}(a) = 1$. Or, toute extension déviante de $\mathfrak{g}$ est nécessairment parasite, d'où

Théorème 3.1.9. *T_ω est ω-stable et complète. Le rang de Lascar d'une extension parasite est égal au rang de Morley, et il est donné par la longueur d'une décomposition en extensions primitives (en particulier, il est fini). Le rang de Lascar ainsi que le rang de Morley du type générique sont $\leq \omega$.* $\square$

Dans une théorie ω-stable, les modèles $\aleph_\epsilon$-saturés sont exactement les modèles ω-saturés, et on déduit donc de 2.3.15 :

Remarque 3.1.10. *Les fusions riches sont exactement les modèles ω-saturés de T_ω.* $\square$

On peut utiliser les résultats sur les paires magnifiques de modèles de T_ω obtenus dans la Section 2.5. Les paires magnifiques d'une théorie stable T étant (essentiellement) la même chose que les *belles paires* (de Poizat) de modèles de T, on peut se servir du Théorème 2.5.10 et de la caractérisation des théories stables qui n'ont pas la propriété du recouvrement fini due à Poizat [Po83] pour obtenir

Corollaire 3.1.11. *La théorie T_ω n'a pas la proriété du recouvrement fini.* □

Dans la suite, nous dirons que $p = \mathrm{stp}_\omega(A/B)$ est un *type parasite / type primitif*, si $L := \mathrm{cl}_\omega(AB)L$ est une extension parasite / primitive de $K := \mathrm{cl}_\omega(B)$. Évidemment, si $p := \mathrm{stp}_\omega(A/B)$ est non-algébrique, on a $p \not\perp^a_K \mathrm{tp}_\omega(L/K)$. Dans la Section 3.2, l'orthogonalité entre les types primitifs sera étudiée en détail, et on trouvera une classe de types primitifs qui représentent toutes les classes de non-orthogonalité et pour lesquels la non-orthogonalité prend une forme concrète.

Tout type primitif est fortement minimal par le Théorème 3.1.9. La Proposition 2.4.14 nous dit qu'il est aussi monobasé. On en déduit que sa prégéométrie est localement modulaire. Alternativement, ce fait suit de la première partie de la proposition suivante (via la caractérisation de la géométrie d'un ensemble fortement minimal ω-catégorique 1.3.10).

Proposition 3.1.12. *(1) Soit $\overline{a}/\overline{b}$ une paire de contrôle de l'extension primitive l/k, où $k \leq K^*$. Alors $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/k)$ contient une formule fortement minimale ω-catégorique. Il y a même une telle formule isolant $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/k)$.*

(2) Tout type primitif est localement modulaire. Si T_0 a une prégéométrie triviale, alors tout type primitif a une prégéométrie triviale.

Preuve. Il est facile de trouver $b \leq \overline{a}' \leq \overline{a}$ avec $\overline{a}'/\overline{b}$ première. Le fait de contenir une formule fortement minimale ω-catégorique est invariant par non-orthogonalité, et on peut donc supposer que $\overline{a}/\overline{b}$ soit première.

Par le Lemme 3.1.6, on peut choisir $\overline{b} \subseteq \overline{b}' = \mathrm{cl}_0(\overline{b}') \subseteq_\omega k$ et une $\mathcal{L}(\overline{b}')$-formule $\psi(\overline{x}, \overline{b}')$ isolant $\mathrm{tp}_\omega(A/k)$. On montre que $\psi(\overline{x}, \overline{b}')$ définit un ensemble fortement minimal localement fini (c'est à dire il n'y a qu'un nombre fini de solutions de $\psi(\overline{x}, \overline{b}')$ dans la clôture algébrique d'un ensemble fini de solutions de $\psi(\overline{x}, \overline{b}')$), ce qui donnera (1). Il est clair que $\psi(\overline{x}, \overline{b}')$ est fortement minimal, et le fait que cet ensemble fortement minimal est localement fini est une conséquence de l'énoncé suivant :

($*$) Soit $M \models T_\omega$ et $D := \psi(M, \overline{b}')$. Pour $E \subseteq D$ on a alors $\mathrm{acl}_\omega(E\overline{b}') = \mathrm{acl}_0(E\overline{b}') \cap D$.

Pour montrer ($*$), on peut supposer que E est fini. Notons que $\delta(E/B') = 0$ (≥ 0 est évident, et ≤ 0 suit du Lemme 2.2.4 par induction sur la cardinalité de E). Donc, $\mathrm{cl}_0(E\overline{b}') = \mathrm{acl}_0(E\overline{b}')$. Comme $\mathrm{acl}_\omega = \mathrm{cl}_\omega$ (Corollaire 2.3.25), on déduit du Lemme 2.2.8 que $\bar{e} \in \mathrm{acl}_0(EB')$ pour tout $\bar{e} \in \mathrm{acl}_\omega(E\overline{b}') \cap D$, ce lemme disant que si A/B est première et $A \subseteq \mathrm{cl}_\omega(C)$ pour un $B \subseteq C$, alors $A \subseteq \mathrm{cl}_0(C)$.

En fait, la preuve de ($*$) donne un peu plus (c'est le contenu de la Remarque 3.1.13), et ce petit plus montre également que si T_0 est triviale, alors tout type primitif dans T_ω l'est aussi. □

Remarque 3.1.13. *Soient $A_1, \ldots, A_n, A'$ des extensions premières de $C = \mathrm{cl}_0(C)$. Alors, on a $A' \subseteq \mathrm{cl}_\omega(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ ssi $A' \subseteq \mathrm{acl}_0(\cup_{i=1}^n A_i)$.* □

Définition 3.1.14. Une expansion fortement minimale $T_0 \subseteq T_1$ est appelée *relativement triviale* si pour tout uplet $\overline{a} \in M \models T_1$ on a $\mathrm{acl}_1(\overline{a}) = \mathrm{acl}_1^u(\mathrm{acl}_0(\overline{a}))$, où $\mathrm{acl}^u(A) := \bigcup_{x \in A} \mathrm{acl}(x)$ dénote la clôture algébrique unitaire.

Remarque 3.1.15. *(1) Si $T_0 \subseteq T_1$ est une expansion fortement minimale relativement triviale, alors pour tout ensemble de paramètres $B \subseteq M \models T_1$, $T_0(B) \subseteq T_1(B)$ est relativement triviale, aussi.*

(2) Si la théorie fortement minimale T_0 a une géométrie triviale, alors une expansion T_1 de T_0 est relativement triviale ssi T_1 a une géométrie triviale.

(3) Une expansion relativement triviale d'une théorie fortement minimale localement projective ne renforce pas la prégéométrie.

(4) Soit $T_1 \supseteq T_0$ une expansion fortement minimale qui renforce la prégéométrie, avec T_0 localement modulaire et T_1 non-triviale. Alors $T_1 \supseteq T_0$ n'est pas relativement triviale.

Preuve. Seule la partie (3) requiert une preuve (car (4) suit de (2) et (3)). Par (1), on peut supposer que T_0 est projective. Clairement, une expansion relativement triviale d'une théorie modulaire est modulaire, et donc T_1 est projective, aussi. Il y a un groupe abélien fortement minimal A interprétable dans $M \models T_0$, A non presque orthogonal à M (au-dessus de $\mathrm{acl}_0(\emptyset)$), par le Fait 1.3.13.

Rappelons que la géométrie d'un groupe fortement minimal modulaire est déterminée par son corps des quasi-endomorphismes (Fait 1.3.12). Donc, si l'expansion $T_0 \subseteq T_1$ renforçait la prégéométrie, l'inclusion $F_0 \subseteq F_1$ devrait être stricte, où F_i dénote le corps des quasi-endomorphismes de A qui sont définissables dans T_i. Choisissons $\alpha \in F_1 \setminus F_0$. Pour deux éléments génériques et indépendants b_1, b_2 on prétend que $b_1 + \alpha b_2 \in \mathrm{acl}_1(b_1 b_2) \setminus \mathrm{acl}_1^u(\mathrm{acl}_0(b_1 b_2))$. Attention : il s'agit là d'un abus de notation, puisque ce calcul se fait dans A/H pour un certain groupe $H \subseteq \mathrm{acl}_1(\emptyset)$ fini. Supposons — on travaille modulo un groupe H' plus grand mais toujours fini — que l'on ait $b_1 + \alpha b_2 = \alpha'(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2)$, avec $\alpha' \in F_1$, $\beta_i \in F_0$. Alors, $\alpha' \beta_2 = \alpha$ et $\alpha' \beta_1 = id$ (car c'est vrai génériquement). Donc, $\beta_1^{-1} = \alpha'$, d'où $\alpha = \beta_1^{-1} \beta_2$, une contradiction ! □

La première partie de la Remarque 3.1.15 admet une réciproque partielle, en effet :

Lemme 3.1.16. *Soit T_0 modulaire, et soit $A \subseteq M^* \models T_1$ un ensemble de paramètres. Alors on a :*

(1) Si $T_0(A) \subseteq T_1(A)$ est relativement triviale, $T_0 \subseteq T_1$ l'est aussi.

(2) Si $T_0 \subseteq T_1$ n'est pas relativement triviale, il existe un entier n tel que dès que $\mathrm{d}_1(A/\emptyset) \geq n$, on a

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \mathrm{acl}_0(A a_1 a_2)} \mathrm{acl}_1(A\alpha) \right) \subsetneq \mathrm{acl}_1(A a_1 a_2)$$

pour toute paire (a_1, a_2) d'éléments génériques indépendants (au sens de $\mathcal{L}_1$) au-dessus de A.

Preuve. Pour montrer (1), on raisonne par l'absurde. Supposons donc que $T_0 \subseteq T_1$ n'est pas relativement triviale. On choisit un uplet générique $\mathcal{L}_1$-indépendant $\bar{b}$ et un élément $a \in \mathrm{acl}_1(\bar{b}) \setminus \mathrm{acl}_1^u(\mathrm{acl}_0(\bar{b}))$. De plus, on peut supposer que $a\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^1 A$, donc en particulier $a \notin \mathrm{acl}_1(A)$. Puisque $T_0(A) \subseteq T_1(A)$ est relativement triviale, il y a $b' \in \mathrm{acl}_0(A\bar{b})$ avec $a \in \mathrm{acl}_1(Ab')$. Comme $b' \notin \mathrm{acl}_1(A)$, on trouve, par modularité de T_0, un élément $b'' \in \mathrm{acl}_0(\bar{b})$ qui est $\mathcal{L}_0$-interalgébrique avec b' au-dessus de $\mathrm{acl}_1(A)$. Donc, $a \in \mathrm{acl}_1(Ab'')$. Or, $a\bar{b}b'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^1 A$, et alors $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^1_{b''} A$. On en déduit que $a \in \mathrm{acl}_1(b'')$, une contradiction. Cela montre (1).

Quant à (2), il suffit de varier légèrement l'argument que l'on vient de donner. Si $\bar{b}$ est un uplet avec $\mathrm{acl}_1(\bar{b}) \supsetneq \mathrm{acl}_1^u(\mathrm{acl}_0(\bar{b}))$, et $\bar{b}$ est de longuer m, l'entier $n := m - 2$ suffira. $\square$

La proposition suivante montre que la fusion libre n'est pas forcément de rang infini, et qu'il vaut donc mieux utiliser l'opposition *non-collapsé / collapsé* au lieu de *rang infini / rang fini*. De plus, cela clarifie la dernière partie de [BH01], où sont étudiées des conditions nécessaires pour pouvoir déterminer des rangs.

Proposition 3.1.17 (Dichotomie du rang)**.** *Soit $\mathfrak{g}$ le type générique.*

(1) Si T_1 et T_2 sont triviales, alors $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = 1$ et $\mathrm{RM}(\mathfrak{g}) = 2$.

(2) Si l'une des T_i n'est pas triviale, alors $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{RM}(\mathfrak{g}) = \omega$.

Preuve. La première partie est facile. En effet, on voit que la trivialité donne $\langle\cdot\rangle = \mathrm{cl}_\omega$. De plus, l'opérateur $\langle\cdot\rangle$ satisfait à la propriété d'échange de Steinitz dans ce contexte. Cela montre que $\mathrm{U}(p) = 1$ pour tout 1-type non-algébrique, en particulier $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = 1$. Or, le nombre des 1-types non-algébriques distincts est infini (cela suit par exemple du Lemme 2.3.18). On conclut que $\mathrm{RM}(\mathfrak{g}) = 2$.

Dans (2), on peut supposer que T_1 n'est pas triviale (par symétrie). Par la Remarque 3.1.15, l'expansion $T_0 \subseteq T_1$ n'est alors pas relativement triviale (même si T_0 est non-triviale !), car l'expansion $T_0 \subseteq T_1$ renforce la prégéométrie par hypothèse. On montre d'abord :

$(*)$ Si $k \leq l = \langle ka\rangle$ est générique, il existe $a' \in \langle ka\rangle_1^2$ tel que $\mathrm{acl}_1(ka') \cap \mathrm{acl}_2(ka) = k$.

On rappelle (voir la Définition 2.2.5) que $\langle A\rangle_1^2 = \mathrm{acl}_2(\langle A\rangle^1) = \mathrm{acl}_2(\mathrm{acl}_1(A))$. Comme l'expansion $T_0 \subseteq T_2$ renforce la prégéométrie, on a $\mathrm{d}_1(\mathrm{acl}_2(ka)/k) = \mathrm{d}_0(\mathrm{acl}_2(ka)/k) \geq 2$. Par la seconde partie du Lemme 3.1.16, on trouve

$$a' \in \langle ka\rangle_1^2 \setminus \Big(\bigcup_{\alpha \in \mathrm{acl}_2(ka)} \mathrm{acl}_1(k\alpha)\Big),$$

car une $\mathcal{L}_0$-base de $\mathrm{acl}_2(ka)/k$ en est aussi une $\mathcal{L}_1$-base. Donc, $\mathrm{acl}_1(ka') \cap \mathrm{acl}_2(ka) = k$, et $(*)$ est établi. On note que, puisque a' n'est pas dans $\mathrm{acl}_2(ka)$, on a $\mathrm{acl}_2(ka') \cap \mathrm{acl}_2(ka) = k$ aussi.

Pour voir que $l' := \langle ka' \rangle \subsetneq l$, il suffit d'appliquer le Lemme 2.2.13 aux ensembles $A := \mathrm{acl}_2(ka)$ et $B := \mathrm{acl}_0(ka')$.

Maintenant, par les inégalités de Lascar , on a $\mathrm{U}(l/l')+\mathrm{U}(l'/k) = n+\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \leq \mathrm{U}(l/k) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})$, pour un entier $n > 0$. Par ailleurs (Théorème 3.1.9), on a $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \leq \mathrm{RM}(g) \leq \omega$, et donc $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{RM}(g) = \omega$. $\square$

3.2 Structure fine de T_ω

Dans cette section, nous étudions la "géométrie" de T_ω, plus particulièrement la géométrie des types parasites dans T_ω. Ce sont les types qu'il faut "rendre algébriques" pour obtenir un collapse de T_ω dans une théorie fortement minimale, en d'autres termes : on a besoin d'un moyen pour borner le nombre de réalisations de tout type parasite, et cela de manière uniforme. Nous obtenons un résultat de coordinatisation de l'ensemble des types parasites par des formules fortement minimales localement finies ayant de bonnes propriétés d'uniformité (Théorème 3.2.13).

Pour une compréhension des classes de non-orthogonalité de types réguliers dans T_ω, il n'est pas nécessaire de considérer des types imaginaires, car c'est une conséquence du Lemme de décomposition 2.2.11 que tout type peut être analysé par des types réguliers réels (le générique est régulier, car la dimension d définit une prégéométrie, et tout type primitif stationnaire est fortement minimal par 3.1.9, donc régulier aussi). On est alors ramené à l'étude de la non-orthogonalité entre types primitifs.

Définition 3.2.1. Soient $k \leq K^*$ et l/k primitive de longueur n. Puis, soit $A \supseteq k$ le plus petit ensemble qui contrôle l et tel que $\mathrm{cl}_0(A) = A$ (cf. 2.2.14). Si $\overline{a}$ est une $\mathcal{L}_0$-base de A au-dessus de k, on appelle (la classe de parallélisme de) $p := \mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/k)$ un *type admissible*. On a $p \in S^n(k)$, et l'entier $n_p := n$ est la *longueur* du type admissible p.

On remarque qu'un type admissible est stationnaire — comme tout autre type au-dessus d'un ensemble cl_ω-clos (cf. 3.1.8). De plus, par la Proposition 3.1.12, tout type admissible (une fois que l'on le considère au-dessus d'une fusion finiment engendrée) est isolé par une formule fortement minimale ω-catégorique. Toutes les classes de non-orthogonalité de types réguliers de T_ω (sauf celle du type générique, évidemment) sont données par des types admissibles. Par 2.2.14, pour tout type primitif $q \in S(k)$ il existe $p \in S(k)$ admissible avec $q \not\perp^a_k p$. Plus généralement, par le Lemme de décomposition (Corollaire 2.2.11), tout type régulier (non-algébrique) q avec $q \perp \mathfrak{g}$ est non-orthogonal à un type admissible. Il suffit donc d'étudier la non-(presque-)orthogonalité dans la classe des types admissibles. On rappelle que tout type admissible est localement modulaire (voir 3.1.12). Le fait suivant (dû à Hrushovski [Hr85]) sera très utile dans notre étude :

Fait 3.2.2. *Soient $p, q \in S(A)$ des types minimaux dans une théorie stable. Si p et q sont modulaires, alors $p \perp^a_A q$ entraîne $p \perp q$.* $\square$

Si $p \in S(B)$ est un type stationnaire et $B \subseteq B'$, on dénote par $p|B'$ l'unique extension non-déviante de p à B'. Puis, pour p_1, p_2 stationnaires et basés au-dessus $B_1, B_2 \subseteq k$, on écrira $p \perp_k^a q$ au lieu de $p|k \perp_k^a q|k$.

Le but initial de la présente étude des classes de non-orthogonalité était la préparation d'un futur collapse. Plus tard, dans la Section 3.5, on pourra justifier pourquoi il suffit de considérer deux cas pour T_0 seulement, soit T_0 est égale à la théorie d'un ensemble infini sans structure (le *cas noir*), soit "essentiellement" à la théorie d'un espace vectoriel infini V sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, c'est à dire une expansion inessentielle et ω-catégorique de $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$ (le *cas rouge*). Pour cela, il suffira de combiner le Lemme 3.2.4 avec la Proposition 3.5.3.

Le lemme suivant suit directement de la Définition 3.2.1, compte tenu du Lemme 2.2.14.

Lemme 3.2.3. *Soient $p, q \in S(k)$ admissibles ($k = \mathrm{cl}_\omega(k)$). Sont équivalents :*

(1) $p \not\perp_k^a q$,

(2) Il existe $\bar{a} \models p$ et $\bar{b} \models q$ tels que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont inter-$\mathcal{L}_0$-algébriques au-dessus de k.

En particulier, si $p \not\perp q$, alors p et q ont la même longueur (disons n), et :

(N) Si T_0 est la théorie d'un ensemble infini sans structure (le cas noir), alors $p \not\perp_k^a q$ si et seulement si $q = \sigma(p)$ pour une permutation $\sigma \in S_n$.

(R) Si T_0 est une expansion inessentielle et ω-catégorique de la théorie d'un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel (le cas rouge), alors $p \not\perp_k^a q$ si et seulement si $q = \Gamma \cdot p + \bar{b}$, pour un $\Gamma \in GL_n(\mathbb{F}_q)$ et un uplet $\bar{b} \in k^n$. Cette notation veut dire : si $\bar{a} \models p$, alors $\Gamma \cdot p + \bar{b} := \mathrm{tp}_\omega(\Gamma \cdot \bar{a} + \bar{b}/k)$ □

Lemme 3.2.4. *Soit T_0 une $\mathcal{L}_0$-théorie fortement minimale ω-catégorique. Alors, il existe un ensemble fortement minimal $\mathcal{L}_0(\bar{b})$-interprétable D_0' avec les propriétés suivantes (T_0' est la théorie de D_0' dans le langage qui nomme toutes les traces d'ensembles $\mathcal{L}_0(\bar{b})$-définissables sur $(D_0')^n$) :*

(1) Si T_0 est triviale, T_0' est la théorie d'un ensemble infini sans structure.

(2) Si T_0 est non-triviale (donc localemement projective), alors T_0' est une expansion inessentielle de $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$ pour un certain corps fini $\mathbb{F}_q$. On peut choisir D_0' de manière que $\mathrm{acl}_0'(\emptyset) = \{0\}$ et alors $\mathrm{dcl}_0' = \mathrm{acl}_0'$.

(3) Soient $T_1, \ldots, T_k \supseteq T_0$ un nombre fini d'expansions fortement minimales de T_0. Alors, dans les cas (1) et (2), on peut choisir D_0' tel que D_0' soit fortement minimal au sens des T_i aussi ($i = 1, \ldots, k$), c'est à dire $\mathrm{DM}_{\mathcal{L}_i}(D_0') = 1$.

Preuve. Si T_0 est triviale, il suffit de considérer la relation d'équivalence (définissable et à classes finies par ω-catégoricité) $E(x, y) :\iff x \in \mathrm{acl}_0(y)$ et $y \in \mathrm{acl}_0(x)$. Si D est l'ensemble $x = x$, on pose $D_0' := D/E \setminus \{\{\mathrm{acl}_0(\emptyset)\}\}$. Cela montre (1) ainsi que (3) dans le cas trivial.

Si T_0 est localement projective, on peut $\mathcal{L}_0(\bar{b})$-interpréter un groupe fortement minimal G_0 dans T_0, par le Fait 1.3.13. La prégéométrie de G_0 (avec la structure induite) est donnée par le corps des quasi-endomorphismes $QE(G_0)$ de

G_0 (cf. 1.3.12). Par ω-catégoricité, $QE(G_0)$ est égal à un corps fini $\mathbb{F}_q$. Modulo le sous-groupe (fini) $H_0 := \mathrm{acl}_{\mathrm{Th}(G_0)}(\emptyset)$, tout quasi-endomorphisme agit comme isomorphisme. Si l'on remplace G_0 par $G'_0 := G_0/H_0$, on a donc affaire à une expansion inessentielle de $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$ (avec $\mathrm{acl}'_0(\emptyset) = \{0\}$). Cela suit par exemple de la Remarque 3.0.4(3).

Pour montrer (3) dans le cas (2), supposons que dans l'expansion fortement minimale $T_1 \supseteq T_0$ on ait $\mathrm{DM}_{\mathcal{L}_1}(G'_0) = d_1 > 1$. Soit G'_1 la composante connexe (par rapport à T_1) de D'_0. Alors, $(G'_0 : G'_1) = d_1$. On choisit un $\mathbb{F}_q$-sous-espace vectoriel fini $W_1 \subseteq G'_0$ tel que $G'_1 + W_1 = G'_0$. Alors, $G'_0/W_1 = G'_1 + W_1/W_1$ est $\mathcal{L}_0$-définissable avec $\mathrm{DM}_{\mathcal{L}_1}(G'_0/W_1) = 1$. Puis, on continue avec l'expansion $T_2 \supseteq T_0$. En quotientant successivement par des $\mathbb{F}_q$-sous-espaces finis $W_2, \ldots, W_k$ on arrive finalement à un quotient G'_0/W avec $\mathrm{DM}_{\mathcal{L}_i}(G'_0/W) = 1$ pour tout i. On termine donc la démonstration de (3) en prenant G'_0/W comme l'ensemble D'_0. □

Avant de continuer l'étude des types admissibles, le Lemme 3.2.4 nous permet de donner une preuve laissée en attente.

Preuve du Théorème 2.6.8. Rappelons le contexte de ce théorème. On a affaire à un contexte de fusion (T_0, T_1, T_2), avec T_i fortement minimale, probablement sans bon contrôle. On veut montrer que la théorie de la fusion libre T_ω dans ce contexte a la propriété de n-amalgamation de modèles, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si la théorie T_ω est stable, elle a la proriété de n-amalgamation de modèles (Fait 1.2.7). Dans le cas général, c'est à dire (toute complétion de) T_ω supersimple pas forcément stable, on arrive à réduire la preuve au cas stable, et cela en prenant un détour.

On aimerait appliquer le Lemme 2.6.3. Pour montrer le théorème, il suffit donc de prouver que si $S := (M_w)_{w \subseteq Y}$ est un Y-système indépendant de modèles de T_ω, alors $S \restriction_{\mathcal{L}_0}$ est un système indépendant de modèles de T_0. Notons d'abord que si T_ω est stable, cela provient du Lemme 1.2.4.

Pour T_ω quelconque, on choisit, appliquant le Lemme 3.2.4, un ensemble D'_0 qui est $\mathcal{L}_0$-interprétable (utilisant un ensemble fini de paramètres $\bar{b}$), avec les propriétés suivantes (on dénote T'_i la théorie de D'_0 dans un langage dans lequel les ensembles définissables sont précisément les traces d'ensembles $\mathcal{L}_i$-définissables, pour $i = 0, 1, 2$) :

(i) T'_i est fortement minimale pour $i = 0, 1, 2$, et

(ii) dans T'_0, on a $\mathrm{dcl}'_0 = \mathrm{acl}'_0$.

Le contexte de fusion (T'_0, T'_1, T'_2) a un bon contrôle par le Lemme 3.0.5 (la propriété (ii) entraîne que les expansions $T'_0 \subseteq T'_i$, pour $i = 1, 2$, préservent les multiplicités). Si T'_ω dénote la théorie de la fusion libre dans ce contexte, c'est donc une théorie ω-stable. Dans la suite, on va supposer que D'_0 est $\mathcal{L}_0(\emptyset)$-interprétable (sinon, on peut ajouter les paramètres nécessaires au langage $\mathcal{L}_0$). Si $M \models T_0$, on notera $M' := D'_0(M) \models T'_0$. Plus généralement, pour $A_0 = \mathrm{acl}_0(A_0) \subseteq M \models T_0$, on pose $A'_0 := M' \cap \mathrm{acl}_0^{eq}(A_0)$. Si M est une $\mathcal{L}$-structure dans $\tilde{\mathcal{C}}$, on munit, de manière canonique, l'ensemble M' de la $\mathcal{L}'$-structure héritée de M, où $\mathcal{L}' := \mathcal{L}_1' \cup \mathcal{L}_2'$. Avec ces notations, on a (la vérification est plus ou moins immédiate car A_0 et A_0' sont inter-$\mathcal{L}_0$-algébriques) :

(a) Si $A = \mathrm{acl}_0(A) \subseteq B = \mathrm{acl}_0(B) \subseteq M^* \models T_\omega$, alors $\delta(A/B) = \delta(A'/B')$, et $A \leq B$ ssi $A' \leq B'$.

(b) Soit $A = \mathrm{acl}_0(A) \leq M \models T_\omega$. Alors, $M' \models T_\omega'$, et $\mathrm{cl}_0'(A') = (\mathrm{cl}_0(A))'$ ainsi que $\mathrm{cl}_\omega'(A') = (\mathrm{cl}_\omega(A))'$.

Revenons à $S = (M_w)_{w \subseteq Y}$, notre Y-système indépendant de modèles de T_ω. Utilisant (b), on voit que $S' := (M_w')_{w \subseteq Y}$ est un Y-système indépendant de modèles de T_ω'. Or, T_ω' est stable, et on déduit que S' est un Y-système indépendant de modèles de T_0', par 1.2.4. Si l'on considère les M_w' comme interprétées, cela veut dire que $M_w' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}^0_{A_w^{S'}} B_w^{S'}$ pour tout $w \subseteq Y$.

Mais M_w et M_w' sont inter-$\mathcal{L}_0$-algébriques pour tout w, donc également A_w^S et $A_w^{S'}$ ainsi que B_w^S et $B_w^{S'}$, d'où le fait que $M_w' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}^0_{A_w^{S'}} B_w^{S'}$ implique $M_w \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}^0_{A_w^S} B_w^S$. $\square$

Remarque. *Dans le contexte du Théorème 2.6.8, soient $M \models T_\omega$ et D_0' choisi comme dans la preuve que nous venons de donner, avec $\mathcal{L}' := \mathcal{L}_1' \cup \mathcal{L}_2'$. Alors, $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}'}(M') = T_\omega'$ ne donne pas nécessairement toute la structure induite sur l'ensemble M'. Ainsi, dans la situation de l'Exemple 3.0.1(2), si l'on quotiente par la relation d'équivalence E, la théorie correspondante T_ω' sera ω-stable, tandis que toute la structure induite donne une théorie instable.*

Revenons aux types admissibles. Le cas noir étant inintéressant en ce qui concerne $\perp$, nous nous restreignons au cas rouge dans notre étude. De plus, le cas noir est précisément le contexte étudié dans la fusion originale de Hrushovski [Hr92] (et on sait donc collapser ce cas, si les théories T_1 et T_2 ont la DMP).

Convention 3.2.5. Dans la suite de la Section 3.2, on suppose que l'on se trouve dans le cas rouge, où T_0 est une expansion inessentielle et ω-catégorique de $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$.

Soient $\Gamma \in GL_n(\mathbb{F}_q)$ et $p \in S^n(k)$ un type admissible de longueur n. On pose

$$\mathrm{Tstab}_\Gamma(p) := \{\bar{c} \mid \text{ Pour } \bar{a} \models p|k\bar{c} \text{ on a } \bar{a}' := \Gamma \cdot \bar{a} + \bar{c} \models p|k\bar{c}\}.$$

Par définissabilité du type p, l'ensemble $\mathrm{Tstab}_\Gamma(p)$ est définissable au-dessus de k. C'est un stabilisateur tordu, et $\mathrm{Tstab}_{\mathrm{id}}(p) = \mathrm{stab}(p)$ est le stabilisateur usuel.

De plus, pour p admissible et $(\bar{a}_1, \bar{a}_2) \models p^{(2)}$, soit $\Delta p := \mathrm{stp}(\bar{a}_1 - \bar{a}_2/\,\mathrm{Cb}(p))$. Un mot sur la notation : si $p, q \in S(k)$ sont stationnaires, et si $\bar{a} \models p$ et $\bar{b} \models q|k\bar{a}$, on note $p \otimes q := \mathrm{tp}(\bar{a}\bar{b}/k)$. Puis, $p^{(n)} := p \otimes p \otimes \ldots \otimes p$ (n fois).

Avant de continuer l'étude des types admissibles, nous faisons quelques observations générales concernant les types et leurs stabilisateurs dans un groupe stable.

Étant donné un groupe G type-définissable (dans une théorie stable), un type fort p qui étend "$x \in G$" est appelé un *sous-groupe type*, s'il est le type générique d'un sous-groupe type-définissable (et connexe) de G. Si p est le type générique d'une cosette (à droite) d'un tel sous-groupe de G, on l'appelle un *cosette type*.

Le groupe G agit (à gauche) sur l'ensemble des types forts étendant "$x \in G$". Si p est un tel type, on prend $\mathrm{stab}(p)$ pour cette opération, et on pose $\Delta p := \mathrm{tp}(a \cdot a'^{-1} / \mathrm{Cb}(p))$, où $(a, a') \models p^{(2)}$.

Évidemmment, ces notions dépendent du groupe G considéré. La preuve du fait suivant est standard :

Fait 3.2.6. *Dans le contexte ci-dessus, soit p un type fort avec $\mathrm{U}(p) < \omega$. Alors :*

(i) p est un sous-groupe type ssi $p \vdash \mathrm{stab}(p)$ (ssi $p = \Delta p$).

(ii) p est un cosette type ssi $\overline{a} \cdot \overline{a}'^{-1} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_B \overline{a}'$ pour tout $(\overline{a}, \overline{a}') \models p^{(2)}|B$ ssi $\Delta p \vdash \mathrm{stab}(p)$ (ssi Δp est l'unique type générique de $\mathrm{stab}(p)$). $\square$

Dans le lemme suivant, nous traitons l'uniformité de ces notions dans un contexte particulier (le résultat est bien connu).

Lemme 3.2.7. *Soit T la théorie d'un groupe de rang de Morley fini, et soit $\varphi(x, u)$ une formule telle que dès que $\varphi(x, b)$ est non-vide, on a $\mathrm{RDM}(\varphi(x, b)) = (m, 1)$. Dans ce cas, p_b dénote l'unique type générique de $\varphi(x, b)$.*

Alors l'ensemble B_{sous} des paramètres b pour lesquels p_b est un sous-groupe type est définissable, de même que l'ensemble B_{cos} des b pour lesquels p_b est un cosette type.

Preuve. Pour montrer le résultat, sous les hypothèses du lemme, on va transformer les caractérisations (i) et (ii) du Fait 3.2.6 en des conditions définissables.

On rappelle que dans T, le rang de Morley est fini, définissable et égal au rang U, donc en particulier il est additif.

On considère $\psi_{sous}(x, y, u) := \varphi(x \cdot y, u)$, et on pose

$$\theta_{sous} := \{b \mid \mathrm{RM}([\varphi(x, b) \times \varphi(y, b)] \cap \psi_{sous}(x, y, b)) = 2m\}.$$

Alors, θ_{sous} est définissable, et cette formule décrit l'ensemble B_{sous}. Pour le voir, considérons $\alpha \models p_b$ et $\beta \models \models p_b|\alpha$. Si $\models \theta_{sous}(b)$, on a $\models \varphi(\alpha \cdot \beta, b)$. Donc, $\mathrm{RM}(\alpha \cdot \beta/b) \leq m$, et alors $\alpha \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_b \alpha \cdot \beta$, car $\mathrm{RM}(\alpha, \beta/b) = 2m$. Cela montre que $p \vdash \Delta p$. La réciproque est facile, par additivité du rang.

On procède de la même manière pour l'ensemble B_{cos}. Premièrement, on met $\psi_{cos}(x, y, z, u) := \varphi(x \cdot y^{-1} \cdot z, u)$. Puis, on démontre que B_{cos} est donné par $\theta_{cos} := \{b \mid \mathrm{RM}([\varphi(x, b) \times \varphi(y, b) \times \varphi(z, b)] \cap \psi_{cos}(x, y, z, b)) = 3m\}$. $\square$

Revenons à la fusion, et à l'étude des types admissibles.

Lemme 3.2.8. *Soit p admissible (de longuer n), avec $\mathrm{Tstab}_\Gamma(p)$ infini pour un $\Gamma \in GL_n(\mathbb{F}_q)$. Alors p est un cosette type.*

Preuve. $\mathrm{Tstab}_\Gamma(p)$ est infini si et seulement s'il contient un type de rang U égal à 1. Puis, notons que $\mathrm{U}(\mathrm{Tstab}_\Gamma(q)) \leq \mathrm{U}(q)$ est vrai pour tout type q, comme dans le cas d'un stabilisateur usuel (par la même preuve).

Supposons que $p \in S^n(k)$, et soit N l'ordre de Γ dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$. On choisit $\overline{a} \models p$ et $\overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_N$, des réalisations de $\mathrm{Tstab}_\Gamma(p)$, indépendantes et génériques au-dessus de $k\overline{a}$. On pose $\overline{a}_1 := \overline{a}$, et inductivement $\overline{a}_{i+1} := \Gamma \cdot \overline{a}_i + \overline{c}_i$. On a alors :

– $\overline{a}_2 \models p|k\overline{c}_1$ (en particulier $\overline{a}_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_k \overline{c}_1$)
– $\overline{a}_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_k \overline{a}_2$ (car $\mathrm{U}(\overline{a}_1\overline{a}_2/k) = \mathrm{U}(\overline{a}_2\overline{c}_1/k) = \mathrm{U}(\overline{a}_1\overline{c}_1/k) = 2$).

D'une manière analogue, on montre :
– $\overline{a}_{i+1} \models p|k\overline{c}_1 \cdots \overline{c}_i$
– $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{N+1}$ est une suite de Morley dans p.

D'autre part, on calcule

$$\overline{a}_{N+1} = \Gamma \cdot \overline{a}_N + \overline{c}_N = \ldots = \Gamma^N \cdot \overline{a}_1 + \Gamma^{N-1} \cdot \overline{c}_1 + \ldots + \Gamma \cdot \overline{c}_{N-1} + \overline{c}_N.$$

Comme $\Gamma^N = \mathrm{id}$, on a $\overline{a}_{N+1} = \overline{a}_1 + \tilde{c}$ pour un certain $\tilde{c} \in \mathrm{acl}_0(\overline{c}_1 \ldots \overline{c}_N)$. Comme $\tilde{c} = \overline{a}_{N+1} - \overline{a}_1$ pour $(\overline{a}_{N+1}, \overline{a}_1) \models p^{(2)}$, utilisant le Fait 3.2.6, il suffit de montrer que $\tilde{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_k \overline{a}_1$. Or, cela est une conséquence de $\overline{a}_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_k \overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_N$. □

Nous savons que tout type admissible est localement modulaire. Puis, un cosette type a évidemment une prégéométrie non-triviale. Le résultat suivant nous dit que c'est la seule possibilité.

Fait 3.2.9. *Soit p un type admissible. Si p est non-trivial, alors p est un cosette type.*

Preuve. Notons qu'un résultat plus général est vrai (qui est du folklore). Néanmoins, nous donnons une preuve dans notre cas particulier.

Comme p a une prégéométrie non-triviale, il existe $\overline{a}_0, \ldots, \overline{a}_{m-1}$, des solutions de p qui sont 2 à 2 indépendantes mais dépendantes. Soit m choisi minimal avec ces propriétés (en fait, $m = 3$ ou $m = 4$, mais on n'a pas besoin de cela). Donc, $\overline{a}_0$ et $\overline{a}_1$ sont interalgébriques au-dessus de $k\overline{a}_2 \ldots \overline{a}_{m-1}$. Il s'en suit (par le Lemme 2.2.14 et la définition d'un type admissible) que $\overline{a}_1 = \Gamma \cdot \overline{a}_0 + \overline{c}$ pour un $\Gamma \in GL_n(\mathbb{F}_q)$ et un uplet $\overline{c} \in \mathrm{cl}_\omega(k\overline{a}_2 \ldots \overline{a}_{m-1}) \setminus k$ (car $\overline{a}_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_k \overline{a}_1$). Comme on a aussi $\overline{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_k \overline{a}_i$ pour $i = 0, 1$, on déduit que $\overline{c} \models \mathrm{Tstab}_\Gamma(p)$, et $\mathrm{Tstab}_\Gamma(p)$) est donc infini. On conclut par le Lemme 3.2.8. □

Lemme 3.2.10. *Soit $k = \mathrm{cl}_\omega(k)$ et $p \in S(k)$ un type admissible, avec $p_i := p \restriction_{\mathcal{L}_i}$ pour $i = 1, 2$. Alors, p est un cosette type si et seulement si p_1 et p_2 sont des cosette types.*

Preuve. Dans cette preuve, nous utilisons constamment la caractérisation de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^*$ donnée dans 2.4.2(2). Notons d'abord que si $(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) \models p^{(n)}$, alors $(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n) \models p_i^{(n)}$ pour $i = 1, 2$. Par le Fait 3.2.6, il suffit de montrer :

($*$) Pour $(\overline{a}_1, \overline{a}_2) \models p^{(2)}$ on a $\overline{a}_1 - \overline{a}_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_k \overline{a}_2 \Leftrightarrow \overline{a}_1 - \overline{a}_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_k^i \overline{a}_2$ pour $i = 1, 2$.

L'implication "$\Rightarrow$" dans ($*$) est facile. Réciproquement, supposons que $\overline{a}_1 - \overline{a}_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_k^i \overline{a}_2$ pour $i = 1, 2$. Comme $\overline{a}_1 - \overline{a}_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_k^0 \overline{a}_2$ est toujours vrai, on en déduit que $k \leq \mathrm{acl}_0(k(\overline{a}_1 - \overline{a}_2)$ est une extension première, (car $\mathrm{acl}_0(k\overline{a}_2) \subseteq \mathrm{acl}_0(k\overline{a}_1\overline{a}_2) =$

$\mathrm{acl}_0(k\overline{a}_2(\overline{a}_1 - \overline{a}_2))$ est une extension première). Donc, $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}_1 - \overline{a}_2/k)$ est admissible, et en particulier $\mathrm{U}(\overline{a}_1 - \overline{a}_2/k) = 1$. Par ailleurs, $\mathrm{U}(\overline{a}_1 - \overline{a}_2/k\overline{a}_2) = \mathrm{U}(\overline{a}_1/k\overline{a}_2) = 1$, d'où $\overline{a}_1 - \overline{a}_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}_k \overline{a}_2$. □

Voilà le résultat qui nous permet de discerner les types de prégéométrie pour les types admissibles d'une manière concrète (pour l'obtenir, on combine le Fait 3.2.9 avec le Lemme 3.2.10).

Proposition 3.2.11. *Soit p admissible, et soit p_i $(i = 1, 2)$ la restriction de p à $\mathcal{L}_i$. Alors, p est non-trivial (donc localement projectif) si et seulement si p_1 et p_2 sont tous les deux des cosette types.* □

Avant que nous utilisons la Proposition 3.2.11 pour obtenir une coordinatisation du "monde parasite", nous discutons quelques exemples. L'exemple suivant montre qu'il y a des types admissibles non-modulaires. Dans le Lemme 3.2.12, nous donnerons une technique générale pour construire de tels types.

Exemple. Soit $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_2}$, et soit T_1 et T_2 la théorie d'un $\mathbb{F}_4$-espace vectoriel infini où les éléments du modèle premier sont nommés par des constantes. Dans ce contexte, on a $\langle\cdot\rangle = \mathrm{cl}_\omega$, car $2\,\mathrm{d}_i(\overline{a}/B) \geq \mathrm{d}_0(\overline{a}/B)$ pour tout ensemble B qui est acl_i-clos pour $i = 1$ ou 2. Considérons le type admissible p au-dessus de $k := \langle\emptyset\rangle$ donné par les équations $x = \lambda_1 *_1 y$ et $x = \lambda_2 *_2 y + c$, où $\lambda_i \in \mathbb{F}_4 \setminus \mathbb{F}_2$, $0 \neq c \in \mathrm{acl}_2(\emptyset)$ et $*_i$ dénote la multiplication scalaire au sens de T_i. C'est un type non-trivial, et Δp est donné par $x = \lambda_1 *_1 y$ et $x = \lambda_2 *_2 y$. Supposons que p soit modulaire. Alors, $p \not\perp^a_k \Delta p$ par le Fait 3.2.2 et on peut donc trouver $(x_\Delta, y_\Delta) \models \Delta p$ et $(x_0, y_0) \models p$ qui sont $\mathbb{F}_2$-interalgébriques au-dessus de k, c'est à dire $\begin{pmatrix} x_\Delta \\ y_\Delta \end{pmatrix} = \Gamma \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour un certain $\Gamma \in GL_2(\mathbb{F}_2)$ et $a, b \in k$ (comme $c \neq 0$, l'un au moins un de a, b est non nul).

On observe que $\lambda_i^3 = 1$, $1 + \lambda_i = \lambda_i^2$ et $1 + \lambda_i^2 = \lambda_i$. Pour alléger la notation, on écrit $\lambda_i z$ au lieu de $\lambda_i *_i z$. Cela ne devrait pas créer de confusions.

Cas $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *:* De $x_\Delta = y_0 + a$ et $y_\Delta = x_0 + b$ on déduit que

$$\lambda_1 a = \lambda_1(x_\Delta + y_0) = \lambda_1^2 y_\Delta + x_0 = \lambda_1^2 y_\Delta + y_\Delta + b = \lambda_1 y_\Delta + b = x_\Delta + b.$$

Donc, $x_\Delta \in k$, une contradiction. Des calculs similaires montrent que $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ainsi que $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont impossibles.

Cas $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *:* D'abord, on montre que $a = \lambda_1 b$ et $a = \lambda_2 b + \tilde{c}$, où $0 \neq \lambda_2 c =: \tilde{c} \in \mathrm{acl}_2(\emptyset)$. Il est facile (mais un peu long) de voir que $\mathrm{tp}_\omega(ab/\tilde{c})$ est admissible (il faut montrer que $\mathrm{d}_0(ab/\tilde{c}) = 2$ et $\mathrm{d}_1(A/\tilde{c}) = \mathrm{d}_2(A/\tilde{c}) = 1$ pour tout $\{0, \tilde{c}\} \subsetneq A \subseteq \mathrm{acl}_0(ab\tilde{c})$). Or, comme $\{0, \tilde{c}\} \leq k = \langle\tilde{c}\rangle$, de tels éléments $a, b \in k$ ne peuvent pas exister. Cela se voit par exemple par induction en utilisant les filtrations $\langle\tilde{c}\rangle_i^n$ de $\langle\tilde{c}\rangle$.

Les cas $\Gamma = \mathrm{id}$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont traités de la même manière. □

Maintenant, nous présentons une construction générale pour obtenir des types admissibles qui sont presque orthogonaux à un type admissible $p(\overline{x}) \in S^n(k)$ donné.

Soit $k = \mathrm{cl}_\omega(k)$ et soit $\overline{c} \in K^*$ un n-uplet. On définit un nouveau type admissible $p_{+\overline{c}}(\overline{x})$ (au-dessus de $l := \mathrm{cl}_\omega(k\overline{c})$) comme suit : On choisit une $\mathcal{L}_i$-formule $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b}_i)$ telle que $p \upharpoonright_{\mathcal{L}_i}$ soit l'unique type générique au-dessus de k contenant $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b}_i)$. Puis, soit p_1 l'extension non-déviante de $p \upharpoonright_{\mathcal{L}_1}$ à l (c'est un $\mathcal{L}_1$-type), et soit $p_{2,\overline{c}}$ l'unique $\mathcal{L}_2$-type générique au-dessus de l contenant $\varphi_2(\overline{x} - \overline{c}, \overline{b}_2)$. C'est un exercice facile de montrer que le type $p_{\overline{c}}$ au-dessus de l qu'on obtient en appliquant le Lemme 2.1.5 à p_1 et $p_{2,\overline{c}}$ — qui exprime $p_1 \cup p_{2,\overline{c}}$ plus “autosuffisant” — est admissible.

Lemme 3.2.12. *Soient $p \in S^n(k)$ admissible et $\overline{c}$ un n-uplet* d*-générique au-dessus de k. Alors, $p \perp^a_{k\overline{c}} p_{+\overline{c}}$.*

De plus, si p est projectif, $p_{+\overline{c}}|k\overline{c}$ est non-modulaire.

Preuve. On raisonne par l'absurde. Supposons donc que $p \not\perp^a_{k\overline{c}} p_{+\overline{c}}$. On peut supposer que $k = \mathrm{cl}_\omega(k)$. Par la Remarque 3.1.13, il y a donc $\overline{a} \models p|k\overline{c}$ et $\overline{a}' \models p_{+\overline{c}}$ tels que $\overline{a}$ et $\overline{a}'$ sont inter-$\mathcal{L}_0$-algébriques au-dessus de $C := k\overline{c}$. On pose $A := \mathrm{acl}_0(k\overline{a})$ et $A' := \mathrm{acl}_0(k\overline{a}')$. Alors :

$(*)$ $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{\,i}_{k} C$, pour $i = 1, 2$,

$(**)$ $A' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{\,1}_{k} C$ et $A' \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{\,2}_{k} C$.

$(*)$ est évident par construction, de même la première partie de $(**)$. La formule $\varphi_2(\overline{x} - \overline{c}, \overline{b}_2)$ $\mathcal{L}_2$-dévie au-dessus de k, car $\mathrm{RM}_{\mathcal{L}_2}(\varphi_2(\overline{x}, \overline{b}_2)) < n$ et $\overline{c}$ est $\mathcal{L}_2$-générique au-dessus de k, ce qui montre la seconde partie de $(**)$.

Maintenant, $(*)$ et $(**)$ ensemble entraînent que $A' \not\subseteq A$, et donc $0 < \mathrm{d}_0(A'/A \cap A')$. Puisque $\overline{c}$ réalise le n-type d-générique au-dessus de A, on a $\mathrm{d}(A'/A) = \mathrm{d}_i(A'/A)$ pour $i = 0, 1, 2$, qui sont égaux à $\mathrm{d}_0(A'/A \cap A')$ (et alors aussi à $\mathrm{d}_i(A'/A \cap A')$ pour $i = 1, 2$), par modularité de T_0. Or, par $(**)$, on a $\mathrm{d}_1(A'/A \cap A') = \mathrm{d}_1(A'/(A \cap A')C) < \mathrm{d}_0(A'/(A \cap A')C) = \mathrm{d}_0(A'/A \cap A')$. (l'inégalité découle du fait que $\mathrm{acl}_0(A'C)$ est une extension première de C et $\mathrm{acl}_0(A \cap A'C) \subsetneq \mathrm{acl}_0(A'C)$) C'est une contradiction.

Notons enfin que si p est projectif, on a $\Delta p = \Delta p_{+\overline{c}}$ (un type admissible). Donc, $p \not\perp p_{+\overline{c}}$. Comme Δp est modulaire, $p_{+\overline{c}}$ est forcément non-modulaire par le Fait 3.2.2. □

Théorème 3.2.13. *Supposons que T_1 et T_2 ont la DMP. Alors, il existe une suite $(\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{z}_i), \theta_i(\overline{z}_i))_{i \in \mathbb{N}}$, où φ_i et θ_i sont des $\mathcal{L}$-formules sans paramètres, avec les propriétés suivantes :*

(I) Pour tout i et tout $\overline{b} \models \theta_i(\overline{z}_i)$, la formule $\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b})$ est fortement minimale et localement finie.

*(II) (*Uniformité du type de géométrie*) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, si $\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b})$ a une prégéométrie triviale (localement projective) pour un $\overline{b} \models \theta_i(\overline{z}_i)$, alors $\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b}')$ a une prégéométrie triviale (localement projective, respectivement) pour tout $\overline{b}' \models \theta_i(\overline{z}_i)$.*

*(III) (*Définissabilité de l'orthogonalité*) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ il existe une $\mathcal{L}$-formule $\chi_i(\overline{z}_i, \overline{z}_i')$ telle que pour tout $\overline{b}, \overline{b}'$ avec $\models \theta_i(\overline{b}) \wedge \theta_i(\overline{b}')$ on ait $\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b}) \not\perp \varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b}')$ si et seulement si $\models \chi_i(\overline{b}, \overline{b}')$.*

De plus, pour tout $i \neq j$ et tout $(\overline{b}, \overline{b}')$ avec $\models \theta_i(\overline{b}) \wedge \theta_j(\overline{b}')$ on a $\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b}) \perp \varphi_j(\overline{x}_j, \overline{b}')$.

*(IV) (*Coordinatisation du monde parasite*) Si $p := \mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/B)$ est un type parasite (c'est à dire $\mathrm{d}(\overline{a}/B) = 0$), alors il existe $\bar{\alpha}_0, \ldots \bar{\alpha}_m \in \mathrm{cl}_\omega(B\overline{a})$ avec $\overline{a} \in \mathrm{cl}_\omega(B\bar{\alpha}_o, \ldots, \bar{\alpha_m})$ tels que, posant $B_i := B\bar{\alpha}_0 \ldots \bar{\alpha}_{i-1}$ pour $i = 0, \ldots m$, on a ou bien $\bar{\alpha}_i \in \mathrm{cl}_\omega(B_i)$ ou bien $\mathrm{tp}_\omega(\bar{\alpha}_i/B_i)$ est générique dans $\varphi_j(\overline{x}, \overline{b})$ pour un $j \in \mathbb{N}$ et $\overline{b} \in B_i$.*

Avant de montrer ce résultat, nous donnons une définition et un lemme :

Définition 3.2.14. Une paire de $\mathcal{L}$-formules $(\varphi(\overline{x}, \overline{z}), \theta(\overline{z}))$ est une *famille admissible* si pour tout $\overline{b} \models \theta(\overline{z})$, la formule $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ est fortement minimale avec un type générique (noté $p_{\overline{b}}$) qui est admissible.

Si $p(\overline{x}) \in S(K^*)$ est un type admissible et $(\varphi(\overline{x}, \overline{z}), \theta(\overline{z}))$ une famille admissible, on dit que p *est codé par* (φ, θ) s'il existe $\overline{b} \in K^*$ tel que $\models \theta(\overline{b})$ et $p = p_{\overline{b}}$.

Lemme 3.2.15. *(1) Soit $p(\overline{x}) \in S(K^*)$ un type admissible. Alors il existe une famille admissible $(\varphi(\overline{x}, \overline{z}), \theta(\overline{z}))$ avec les propriétés suivantes :*

(i) p est codé par $(\varphi(\overline{x}, \overline{z}), \theta(\overline{z}))$.

(ii) Si p est trivial / localement projectif, alors tout type admissible q codé par (φ, θ) est également trivial / localement projectif.

(iii) Si q, q' sont admissibles avec $q \not\perp q'$, et si q est codé par (φ, θ), alors q' est codé par (φ, θ) aussi.

(2) Soient $(\varphi(\overline{x}, \overline{z}), \theta(\overline{z}))$ et $(\varphi'(\overline{x}', \overline{z}'), \theta'(\overline{z}'))$ deux familles admissibles. Alors il existe une $\mathcal{L}$-formule $\chi(\overline{z}, \overline{z}')$ telle que pour tout $\overline{b} \models \theta(\overline{z})$ et $\overline{b}' \models \theta'(\overline{z}')$ on ait $\models \chi(\overline{b}, \overline{b}')$ si et seulement si $\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \not\perp \varphi'(\overline{x}', \overline{b}')$.

Preuve. Soit $p(\overline{x}) = \mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/K^*)$ un type admissible, où $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$. Soit $p_i := p \upharpoonright_{\mathcal{L}_i}$. On choisit $B = \mathrm{acl}_0(B) \subseteq K^*$ fini tel que $\mathrm{Cb}_1(p_1), \mathrm{Cb}_2(p_2) \in B$. Comme on est dans le contexte rouge, $A := \mathrm{acl}_0(B\overline{a}) = \mathrm{dcl}_0(B\overline{a})$, et tout élément de A est de la forme

$$\alpha = b + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i a_i, \tag{3.1}$$

où $b \in B$ et les λ_i sont dans $\mathbb{F}_q$.

On énumère B par $\overline{b}$ et A par $\tilde{a}$. Puis, on choisit $\tilde{\varphi}_0(\tilde{x}, \overline{z})$ isolant $\mathrm{tp}_0(\tilde{a}, \overline{b})$ et des $\mathcal{L}_i$-formules $\tilde{\varphi}_i(\tilde{x}, \overline{z})$ pour $i = 1, 2$ satisfaisant :

- $\tilde{\varphi}_i(\tilde{x}, \overline{z}) \vdash \tilde{\varphi}_0(\tilde{x}, \overline{z})$ pour $i = 1, 2$.
- $\tilde{\varphi}_i(\tilde{x}, \overline{z})$ est rang-complète par rapport à $\mathrm{tp}_i(\tilde{a}/\overline{b})$.

Le Lemme 2.3.3 nous dit que si $\models \bigwedge_{i=0}^{2} \tilde{\varphi}_i(\tilde{a}', \overline{b}')$, alors ou bien $\tilde{a}' \in \mathrm{cl}_0(\overline{b}')$ ou bien $\tilde{a}'/\overline{b}'$ est une extension première.

Soit maintenant $\varphi_i(\overline{x}, \overline{z})$ la $\mathcal{L}_i$-formule que l'on obtient en remplaçant dans $\tilde{\varphi}_i(\tilde{x}, \overline{z})$ les variables $\tilde{x}$ par des $\mathcal{L}_0$-termes en $\overline{x}, \overline{z}$ donnés par (3.1). Pour $i = 1, 2$ on choisit $\theta_i(\overline{z}) \in \mathrm{tp}_i(\overline{b})$ de telle manière que pour tout $\overline{b}' \models \theta_i(\overline{z})$ on ait

(∗) $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b}')$ est non-vide et $\mathrm{DM}_i(\varphi(\overline{x}, \overline{b}')) = 1$.

(∗∗) $\mathrm{tp}_i(\overline{a}/B)$ est un cosette type si et seulement si le type générique de $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b}')$ est un cosette type.

Notons que (∗) est possible car les théories T_i ont la DMP, tandis que (∗∗) est possible par le Lemme 3.2.7. Posons $\varphi(\overline{x}, \overline{z}) := \varphi_1(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \varphi_2(\overline{x}, \overline{z})$ et $\theta(\overline{z}) := \theta_1(\overline{z}) \wedge \theta_2(\overline{z})$. On vérifie sans problème que (φ, θ) est une famille admissible qui code p et qui satisfait à (ii), par la Proposition 3.2.11 et (∗∗).

Par le Lemme 3.2.3(R), il suffit de modifier (φ, θ) de façon à ce que si elle code un type admissible p', elle code aussi les types $\Gamma \cdot p' + \overline{c}$, où $\Gamma \in GL_n(\mathbb{F}_q)$ et $\overline{c} = (c_0, \ldots, c_{n-1})$ est un uplet arbitraire (de K^*).

Pour $\Gamma \in GL_n(\mathbb{F}_q)$, on choisit des ensembles $\mathcal{L}_1(\emptyset)$-définissables finis, non-vides et disjoints $F_\Gamma \subseteq \mathrm{acl}_1(\emptyset)$. C'est possible car $\mathrm{acl}_1(\emptyset)$ est infini. Puis, soit $\varphi_\Gamma(\overline{x}, \overline{z}, z') := z' \in F_\Gamma \wedge \varphi(\Gamma \cdot \overline{x}, \overline{z})$. On pose

$$\varphi'(\overline{x}, \overline{z}, z') := \bigvee_{\Gamma \in GL_n(\mathbb{F}_q)} \varphi_\Gamma(\overline{x}, \overline{z})$$

ainsi que $\theta'(\overline{z}, z') := (z' \in \cup_\Gamma F_\Gamma) \wedge \theta(\overline{z})$. Ensuite, pour incorporer les translatés, on pose $\varphi''(\overline{x}, \overline{z}, \overline{z}', \overline{z}'') := \varphi'(\overline{x} - \overline{z}'', \overline{z}, z')$ et $\theta''(\overline{z}, z', \overline{z}'') := \theta'(\overline{z}, z')$. Par construction, (φ'', θ'') est une famille admissible, telle qu'un type admissible p'' est codé par (φ'', θ'') si et seulement s'il existe p codé par (φ, θ) avec $p'' \not\perp p$. Donc, (φ'', θ'') satisfait à (i–iii).

Pour montrer (2), on se donne $\overline{b} \models \theta(\overline{z})$ et $\overline{b}' \models \theta'(\overline{z}')$. On sait que $\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \not\perp \varphi'(\overline{x}', \overline{b}')$ si et seulement si $\overline{x}$ et $\overline{x}'$ ont la même longueur (disons n) et il existe $\Gamma \in GL_n(\mathbb{F}_q)$ et $\overline{c} = (c_0, \ldots, c_{n-1})$ tels que $\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \wedge \varphi'(\Gamma \cdot \overline{x} - \overline{c}, \overline{b}')$ est infini. Comme $GL_n(\mathbb{F}_q)$ est fini et comme T_ω n'a pas la propriété du recouvrement fini (Corollaire 3.1.11), c'est une condition définissable, d'où (2). Notons que l'on pourrait remplacer l'utilisation de la nfcp par un argument plus concret, en regardant ce qui se passe au niveau des langages $\mathcal{L}_i$. □

Preuve du Théorème 3.2.13. Soit $(p_i)_{i<\omega}$ une énumération de tous les types admissibles dans $S(K_\omega)$, où K_ω est le modèle dénombrable saturé de T_ω. C'est possible car T_ω est ω-stable. En utilisant le Lemme 3.2.15, on choisit (φ_0, θ_0), une famille admissible codant p_0 et ayant les propriétés (ii) et (iii) du Lemme 3.2.15(1). Inductivement, pour $m \geq 0$, on suppose qu'on ait déjà trouvé des familles admissibles $(\varphi_j, \theta_j)_{0 \leq j \leq m'}$ (pour un m' fini) avec les propriétés suivantes, pour tout $j, j' \leq m'$ avec $j \neq j'$:

– Pour $i = 0, \ldots m$, il existe $k \leq m'$ tel que p_i soit codé par (φ_k, θ_k).
– (φ_j, θ_j) satisfait aux propriétés (ii) et (iii) de 3.2.15.
– Si $\models \theta_j(\overline{b}) \wedge \theta_{j'}(\overline{b}')$, alors $\varphi_j(\overline{x}, \overline{b}) \perp \varphi_{j'}(\overline{x}, \overline{b}')$.

Maintenant, si p_{m+1} est codé par une des (φ_j, θ_j) pour $j \leq m'(m)$, on continue avec $(\varphi_j, \theta_j)_{0\leq j\leq m'}$. Sinon, on choisit, utilisant le Lemme 3.2.15(1), une famille admissible $(\tilde{\varphi}(\overline{x}, \overline{z}), \tilde{\theta}(\overline{z}))$ qui code p_{m+1} et vérifie (ii–iii). On pose $\varphi_{m'+1} := \tilde{\varphi}$ et $\theta(\overline{z}) := \tilde{\theta}(\overline{z})) \wedge \bigwedge_{j=0}^{m'} \neg\exists \overline{z}_j \chi_j(\overline{z}, \overline{z}_j)$, où χ_j définit la non-orthogonalité entre instances de $\tilde{\varphi}$ et φ_j. Une telle formule χ_j existe d'après 3.2.15(2). Cela termine l'étape d'induction.

La suite $(\varphi_i, \theta_i)_{i<\omega}$ ainsi construite a les propriétés (I–III), puisque toute formule fortement minimale contenant un type admissible est localement finie d'après la Proposition 3.1.12(1). Quant à (IV), par la Proposition 2.2.9, il suffit de montrer que tout type admissible p est codé par une des (φ_i, θ_i). Soit $p \in S(k)$ avec k finiment engendrée. Or, la fusion k a une copie isomorphe k' dans K_ω, et on peut donc coder $p'|K_\omega$ (par $(\varphi_{i_0}, \theta_{i_0})$), où p' dénote le type admissible qu'on obtient en remplaçant les paramètres k dans p par k', à l'aide de l'isomorphisme donné. Donc, p est codé par $(\varphi_{i_0}, \theta_{i_0})$ aussi. $\square$

Remarque 3.2.16. *Le Théorème 3.2.13 est vraie dans tout contexte de fusion fortement minimal.*

Supposons maintenant que $p = \Delta p$ est un type admissible au-dessus de la fusion finiment engendrée $k = \mathrm{cl}_\omega(k)$. Par la Proposition 3.1.12, le groupe $G := \mathrm{stab}(p)$ est alors un groupe fortement minimal ω-catégorique (et modulaire). Sa géométrie est donc déterminée par le corps $QE(G)$ des quasi-endomorphismes de G. Par l'ω-catégoricité, $QE(G)$ est un corps fini. Clairement, $QE(G)$ se plonge dans $Mat_{n_p}(\mathbb{F}_q)$. Nous donnons deux exemples pour illustrer les situations qui peuvent apparaître.

Exemples. (1) Soit $T_0 := \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_2}$, et pour $i = 1, 2$, on considére $T_i := \mathrm{EV}_{F_i}$, où $F_i := \overline{\mathbb{F}_2}$. Comme dans un exemple antérieur on choisit $1 \neq \lambda_i \in F_i$ avec $\lambda_i^3 = 1$.

Les équations $x = \lambda_1 *_1 y$ et $x = \lambda_2 *_2 y$ déterminent un type admissible $p(x, y)$ (il suffit d'ajouter $x \neq 0$ pour garantir $\mathrm{d}_0(x, y) = 2$). Le groupe $G := \mathrm{stab}(p)$ est alors donné par $\{(x, y) \mid x = \lambda_i *_i y \text{ pour } i = 1, 2\}$. Dans cet exemple, $\mathbb{F}_4 \subseteq QE(G)$, car $(\lambda_1, \lambda_1) : G \to G, (x, y) \mapsto (\lambda_1 *_1 x, \lambda_1 *_1 y)$ est un quasi-endomorphisme d'ordre 3.

Pour voir cela, rappelons que $\lambda_i \in F_i$ est un élément qui engendre $\mathbb{F}_4$, le corps à 4 éléments. On a donc $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \lambda_i, \lambda_i^2\}$, et $\lambda_i^2 = \lambda_i + 1$. L'addition dans les deux langages est la même. Donc, si λ_1 et λ_2 agissent de la même manière sur un élément y, c'est aussi le cas de $\lambda_i^2 = \lambda_i + 1$. A fortiori, on a : Si $\lambda_1 *_1 y = \lambda_2 *_2 y = x$, alors $\lambda_1^2 *_1 y = (\lambda_1 + 1) *_1 y = (\lambda_2 + 1) *_2 y = \lambda_2^2 *_2 y$, c'est-à-dire $\lambda_1 *_1 x = \lambda_2 *_2 x$.

Comme le corps $QE(G)$ se plonge dans $GL_2(\mathbb{F}_2)$, nécessairement $QE(G) = \mathbb{F}_4$.

(2) Comme dans (1), $T_i = \mathrm{EV}_{F_i}$, où $F_0 := \mathbb{F}_4$, $F_1 := \overline{\mathbb{F}_2}$, et F_2 est un corps gauche contenant $\mathbb{F}_4$ tel que il existe $\lambda_2 \in F_2$ et $\lambda \in \mathbb{F}_4$ avec $\lambda_2 \lambda \lambda_2^{-1} \notin \{\lambda, \lambda^{-1}\}$, c'est à dire F_2 ne normalise pas $\mathbb{F}_4$. Un tel corps gauche existe

— il suffit de prendre un corps des fractions de $\mathbb{F}_4 *_{\mathbb{F}_2} K$, où K est une extension propre de $\mathbb{F}_2$.

Choisissons $\lambda_1 \in F_1$, un élément primitif de $\mathbb{F}_8$. Soit p donné par $x = \lambda_i *_i y$, pour $i = 1, 2$. Il n'est pas difficile (mais un peu long) de voir que $QE(\mathrm{stab}(p)) = \mathbb{F}_2 \subsetneq \mathbb{F}_4$.

Définition 3.2.17. Soit $(G, \cdot)$ un groupe (avec éventuellement plus de structure), et soit

$$\mathcal{H} := \{H \mid H \text{ est un sous-groupe } \mathrm{acl}^{eq}(\emptyset)\text{-definissable de } G^n, \text{ pour un } n \in \mathbb{N}\}.$$

On dit que G est une *structure abélienne* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout sous-ensemble définissable de G^n est une combinaison booléenne de cosettes d'éléments de $\mathcal{H}$.

Il est facile de voir que si G est une structure abélienne, alors G est stable et monobasée. De plus, G est alors abélien-par-fini. La réciproque est le théorème fameux de Hrushovski-Pillay :

Fait 3.2.18 ([HP87])**.** *Un groupe stable G est monobasé si et seulement si G est une structure abélienne.*

Lemme 3.2.19. *Sont équivalents :*

(1) T_ω est monobasée.

(2) T_1 et T_2 sont monobasées.

Preuve. Toutes les théories en question sont des expansions stables de T_0 qui est la théorie d'une structure abélienne. Une telle expansion est monobasée ssi c'est une structure abélienne, par le Fait 3.2.18. Maintenant, si et T_1 et T_2 sont des structures abéliennes, c'est à dire n'ajoutent que des (cosettes de) sous-groupes comme nouveaux ensembles définissables, toute complétion de $T_1 \cup T_2$ sera la théorie d'une structure abélienne aussi (voir [GR90]). En particulier, T_ω est monobasée dans ce cas. Inversement, il suffit de rappeler que tout réduit d'une structure abélienne est abélienne, si la loi de groupe reste définissable dans le réduit (voir [Pi96, Prop. 4.6.4]). □

Définition 3.2.20. Le contexte de fusion décrit dans le Lemme 3.2.19 est appelé *contexte de fusion abélien.*

Proposition 3.2.21. *Dans le contexte de fusion abélien, on a :*

(1) T_ω est non-multidimensionnelle (nous dirons : dimensionnelle).

(2) Aucun type admissible dans T_ω n'est trivial.

Preuve. Dans une structure abélienne, tout type est non-orthogonal au type générique p d'un groupe tel que p ne dévie pas au-dessus de $\emptyset$. Cela montre (1) et (2).

Or, quand on utilise l'analyse des extensions primitives déjà effectuée, on peut donner un argument plus concret. Si $\varphi_1(\overline{x}, \bar{b})$ et $\varphi_2(\overline{x}, \bar{b})$ sont des $\mathcal{L}_i$-formules irréductibles qui décrivent un certain type admissible $p \in S^n(k)$ (une fois que l'on applique le Lemme 2.1.5 aux types génériques p_i de φ_i au-dessus de k), alors ces p_i sont des types génériques de cosettes de sous-groupes $\mathrm{acl}_i(\emptyset)$-définissables $H_i \leq (M^n, +)$, car les T_i sont abéliennes. Donc, $\mathrm{stab}(p) = H_1 \cap H_2$ avec type générique Δp. Ce dernier est un type admissible basé sur $\langle\emptyset\rangle$. □

En fait, il y a un résultat général reliant la dimensionalité de T_ω et l'existence de types admissibles triviaux :

Proposition 3.2.22. *Si T_ω contient un type admissible avec une prégéométrie triviale, alors T_ω est une théorie multidimensionnelle.*

Preuve. Soit $p \in S^n(k)$ un type admissible ($k = \mathrm{cl}_\omega(k)$) avec une prégéométrie triviale. Soit $(\bar{c}_i), i \in I$ une longue suite de Morley dans le type d-générique de $S^n(k)$. Par le Lemme 3.2.12 et le Fait 3.3.3, on a $p_{+\bar{c}_i} \perp p_{+\bar{c}_j}$ pour tout $i \neq j$. On en déduit qu'il y a un nombre non-borné de classes de non-orthogonalité de types fortement minimaux, ce qui implique la multidimensionalité de T_ω. □

Nous avons vu que le contexte de fusion abélien implique la non-multidimensionalité de T_ω, et que cette dernière implique qu'aucun type admissible n'est trivial.

La question de savoir si ces implications sont strictes semble difficile. Une réponse passerait par la représentabilité de certains matroïdes (finis) dans T_i.

3.3 Enveloppes affines et fusion libre

Initialement, Assaf Hasson et moi [HH06] pensions pouvoir aborder le problème du collapse de la fusion libre T_ω en une théorie fortement minimale dans un cadre très général (pour un contexte de fusion fortement minimal (T_0, T_1, T_2) comme dans 3.1.1, tel que de plus T_1 et T_2 ont la DMP). L'espoir venait du résultat très prometteur sur la coordinatisation du monde parasite obtenu dans le Théorème 3.2.13. L'idée était de généraliser la théorie des *approximations lisses* (en englais : *smooth approximations*) développée dans [CHL85] (et plus récemment dans [CH03]), en considérant 3.2.13 comme une “version locale” des théories ω-catégoriques et ω-stables étudiées dans [CHL85]. Une des difficultés majeures à surmonter pour collapser T_ω au-dessus de $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$ (ou de toute autre théorie T_0 non-triviale) est la présence des types admissibles localement modulaires non-modulaires, ou, de façon équivalente, la présence d'espaces affines fortement minimaux. Une version axiomatique du problème du collapse peut être formulée en utilisant la notion d'une *enveloppe*, comme elle est développée dans [Ha04], suivant essentiellement [CH03]. À l'aide de cette notion d'enveloppe (ou plutôt de celle d'une *pseudo-enveloppe*), nous formulons une stratégie pour collapser la fusion libre en toute généralité (voir [HH06, Appendix A]).

Cependant, nous n'avons pas réussi à implémenter complètement la stratégie proposée, essentiellement car nous ne savions pas résoudre un problème combinatoire lié à la propriété d'amalgamation dans une classe restreinte de fusions. À la fin 2005, Baudisch, Martin-Pizarro et Ziegler [BMZ05a] ont montré le collapse au-dessus de $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$, en utilisant un nouvel outil (les *suites aux différences*) qui n'a pas d'analogue évident dans le cadre axiomatique proposé dans [HH06]. C'est à l'aide de ces suites aux différences que le problème combinatoire mentionné ci-dessus est résolu dans [BMZ05a].

Or, la technique des enveloppes permet la solution d'un cas particulier, le collapse dans le contexte de fusion abélien (voir la Section 3.4). C'est d'ailleurs cette solution qui motivait la stratégie générale. Dans [Ha04], Hasson montre jusqu'où on peut aller avec des techniques d'enveloppes en vue d'un collapse (généralisé), en quittant même le contexte stable.

Ici, nous nous contentons de quelques observations générales et élémentaires concernant les enveloppes (affines) dans une théorie stable quelconque (Sous-section 3.3.1), et nous en tirerons ensuite des conséquences utiles en spécialisant au contexte de la fusion libre (Sous-section 3.3.2). Cela facilitera également la compréhension du collapse dans le contexte de fusion abélien.

3.3.1 Une digression : Enveloppes affines dans une théorie stable

Dans cette sous-section, contrairement au reste du Chapitre 3, on suppose juste que T est une théorie stable et complète. De plus, nous fixons le cadre suivant :

Contexte 3.3.1.
- $\mathcal{S}$ est un ensemble de sortes tel que pour tout $\overline{a}$ et B appartenant à $\mathcal{S}$ avec $B = \mathrm{acl}(B)$ (la clôture algébrique étant restreinte à $\mathcal{S}$), le type $p = \mathrm{tp}(\overline{a}/B)$ est stationnaire.
- Σ est une famille $\emptyset$-invariante de types (finitaires) complets et monobasés dans $\mathcal{S}$ telle que Σ est close par analysabilité dans $\mathcal{S}$. Cela veut dire : si $\overline{a}$ et B appartiennent à $\mathcal{S}$ et si $p = \mathrm{tp}(\overline{a}/B)$ est Σ-analysable, alors p est dans Σ.
- $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ est une sous-famille $\emptyset$-invariante close par extension non-déviante et telle que tout type dans Σ_0 soit minimal et localement modulaire.
- Tout type dans Σ admet une coordinatisation par Σ_0, c'est à dire pour tout $\mathrm{tp}(\overline{b}/B) \in \Sigma$ il existe une suite $(\overline{a}_i)_{i<n}$ avec $\overline{a}_i \in \mathrm{acl}(B\overline{b})$ pour tout i et $\overline{b} \in \mathrm{acl}(B\overline{a}_{<n})$, et telle que $\mathrm{stp}(\overline{a}_i/B\overline{a}_{<i})$ soit dans Σ_0 (ici, on dénote par $\overline{a}_{<i}$ l'ensemble des $\overline{a}_j$ avec $j < i$).

Exemples 3.3.2. Les deux cadres suivants sont des instances de 3.3.1 :

(1) T superstable, $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les sortes dans T^{eq}, Σ la famille des types monobasés de rang U fini, et finalement Σ_0 la famille des types minimaux localement modulaires. Le résultat de coordinatisation des types de Σ par des types de Σ_0 est dû à Buechler [Bu86].

(2) T_ω la théorie de la fusion libre (dans le contexte 3.1.1), $\mathcal{S}$ uniquement la sorte réelle, Σ la famille des types parasites, et Σ_0 la famille des types admissibles (cf. 3.3.15).

Tout ce que nous présentons dans cette sous-section suit plus ou moins de l'étude des types réguliers localement modulaires effectuée dans [Hr85].

À part d'un résultat déjà mentionné (Fait 3.2.2)), on aura surtout besoin des faits suivants qui sont montrés dans [Hr85] :

Fait 3.3.3. *Soit $p \in S(A)$ un type minimal localement modulaire non-modulaire, alors pour tout $B \supseteq A$ on a : $p|B$ est modulaire si et seulement s'il existe $\beta \models p$ avec $\beta \in \mathrm{acl}(B)$.* □

Fait 3.3.4. *Soit T une théorie stable et $p \in \mathrm{stp}(A)$ un type minimal localement modulaire. Alors il existe un type $p' \in \mathrm{stp}(A)$ qui est minimal, modulaire et non-orthogonal à p.* □

Définition 3.3.5. Soit $k = \mathrm{acl}(k) \subseteq l = \mathrm{acl}(l)$ des sous-ensembles algébriquement clos d'un modèle M de T. Soit $(\overline{a}_i)_{i<\alpha}$ une suite d'uplets de l. Alors, on appelle $(\overline{a}_i)_{i<\alpha}$ une Σ_0-*construction de l/k*, si

(I) $l = k \cup \bigcup_{i<\alpha} \overline{a}_i$ et

(II) $\mathrm{tp}(\overline{a}_i/k\overline{a}_{<i})$ est algébrique ou dans Σ_0.

Si on remplace (II) par

(II') $\mathrm{tp}(\overline{a}_i/ka_{<i})$ est algébrique ou un type non-modulaire dans Σ_0,

on dit que $(\overline{a}_i)_{i<\alpha}$ est une Σ_0-*construction affine* (de l/k).

Notation. Soit $p \in S(B)$ un type minimal et $B \subseteq A = \mathrm{acl}^{eq}(A)$, alors $\dim_A(p)$ dénote la dimension de la prégéométrie induite sur p^A par la clôture algébrique. C'est donc la cardinalité d'un ensemble maximal de solutions indépendants du type p dans A.

Proposition 3.3.6. *Soient $(\overline{a}_i)_{i<\alpha}$ et $(\overline{a}'_i)_{i<\alpha'}$ deux Σ_0-constructions de l/k. Puis, soit $I \subseteq \alpha$ l'ensemble des indices $i < \alpha$ tels que $\overline{a}_i \notin \mathrm{acl}(k\overline{a}_{<i})$. On définit $I' \subseteq \alpha'$ de manière analogue. Pour $i \in I$, on pose $q_i := \mathrm{stp}(\overline{a}_i/k\overline{a}_{<i})$, de même $q'_i := \mathrm{stp}(\overline{a}'_i/k\overline{a}'_{<i})$ pour $i \in I'$. Alors il y a une bijection $\lambda : I \to I'$ avec les propriétés suivantes :*

(1) $q_i \not\perp q'_{\lambda(i)}$, plus précisément, posant $k_i := k\overline{a}_{<i}\overline{a}'_{<\lambda(i)}$, on a $q_i \not\perp^a_{k_i} q'_{\lambda(i)}$.

(2) q_i est modulaire si et seulement si $q'_{\lambda(i)}$ est modulaire.

Preuve. On traite les classes de non-orthogonalités de types minimaux dans Σ_0 une par une, et on se donne donc une telle classe $\mathbb{P}$. Soit $I(\mathbb{P}) := \{i \in I \mid q_i \in \mathbb{P}\}$, et soit $I'(\mathbb{P}) \subseteq I'$ défini de manière analogue. L'ensemble d'indices $I(\mathbb{P})$ est la réunion disjointe de $I_m(\mathbb{P})$ (consistant en les indices des types modulaires dans $I(\mathbb{P})$) et de $I_a(\mathbb{P})$, l'ensemble des indices des types non-modulaires dans $I(\mathbb{P})$. De manière similaire, on a une partition $I'(\mathbb{P}) = I'_m(\mathbb{P})\dot{\cup}I'_a(\mathbb{P})$. Soient i, i' les éléments minimaux de $I(\mathbb{P})$ et $I'(\mathbb{P})$, respectivement. Par le Fait 3.3.4, il existe des types minimaux modulaires $p, p' \in \mathbb{P}$ (avec p, p' pas forcément dans Σ_0, ni dans $\mathcal{S}$), tels que $p \in S(\mathrm{acl}^{eq}(k\overline{a}_{<i}))$ et $p' \in S(\mathrm{acl}^{eq}(k\overline{a}'_{<i'}))$. Par 3.2.2, on a $p \not\perp^a_{k\overline{a}_{<i}\overline{a}'_{<i'}} p'$. La minimalité de i' donne alors $\dim_{\mathrm{acl}^{eq}(k\overline{a}_{<i}\overline{a}'_{<i'})}(p|k\overline{a}_{<i}) = 0$, d'où l'on obtient (par symétrie)

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathrm{acl}^{eq}(l)}(p|k\overline{a}_{<i}) = \dim_{\mathrm{acl}^{eq}(l)}(p|k\overline{a}_{<i}\overline{a}'_{<i'})\\ =&\dim_{\mathrm{acl}^{eq}(l)}(p'|k\overline{a}_{<i}\overline{a}'_{<i'}) = \dim_{\mathrm{acl}^{eq}(l)}(p'|k\overline{a}'_{<i'}).\end{aligned}$$

Puis, $\dim_{\mathrm{acl}^{eq}(l)}(p|k\overline{a}_{<i}) = |I_m(\mathbb{P})|$ suit de la minimalité de i, et par symétrie on a $\dim_{\mathrm{acl}^{eq}(l)}(p'|k\overline{a}'_{<i'}) = |I'_m(\mathbb{P})|$. Il y a donc une bijection $\lambda : I_m(\mathbb{P}) \to I'_m(\mathbb{P})$.

Pour $i \in I_a(\mathbb{P})$, on définit $\lambda(i)$ comme le plus petit élément $i' \in I'$ tel que $q_i|k\overline{a}_{<i}\overline{a}'_{\leq i'}$ soit modulaire. Un tel i' existe, puisque $q_i|l$ est modulaire. Posant $k_i := k\overline{a}_{<i}\overline{a}'_{<\lambda(i)}$, on en déduit que $q_i \not\perp^a_{k_i} q'_{\lambda(i)}$ par le Fait 3.3.3. De plus, aussi par ce fait, on obtient que $q'_{\lambda(i)}|k_i$ est non-modulaire (et dans $\mathbb{P}$), tandis que $q'_{\lambda(i)}|k_i\overline{a}_i$ est modulaire. En conclusion, $\lambda(i) \in I'_a(\mathbb{P})$ et, par symétrie, i est égal au plus petit élément $j \in I$ tel que $q'_{\lambda(i)}|k\overline{a}_{\leq j}\overline{a}'_{<\lambda(i)}$ soit modulaire. Donc, on vient de définir une bijection de $I_a(\mathbb{P})$ sur $I'_a(\mathbb{P})$, ce qui termine la preuve. □

Lemme 3.3.7. *Soient $k \subseteq l \subseteq m$ des ensembles algébriquement clos (et dans $\mathcal{S}$).*

(1) Sont équivalents :
   (a) m/k admet une Σ_0-construction.
   (b) m/l ainsi que l/k admettent une Σ_0-construction.

(2) Même énoncé que dans (1), en remplaçant “Σ_0-construction” par “Σ_0-construction affine”.

Preuve. Quant à (1), on observe que l'implication (b)⇒(a) est claire. Puis, toute Σ_0-construction de m/k en est aussi une pour m/l (on utilise que Σ_0 est clos par extension non-déviante). Il suffit donc de montrer que si m/k admet une Σ_0-construction, alors l/k aussi. Par un argument de chaîne, on se ramène au cas où $l = \mathrm{acl}(k\overline{b})$ pour un uplet $\overline{b} \in l$ fini. Comme m/k admet une Σ_0-construction, $p := \mathrm{tp}(\overline{b}/k)$ est analysable par Σ_0. Donc, $p \in \Sigma$ car $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ et Σ est clos par analysabilité. Comme tout type dans Σ, le type p admet une coordinatisation dans Σ_0, d'où l'on obtient une Σ_0-construction de l/k.

Montrons (2). Comme dans le cas (1), si l/k et m/l admettent une Σ_0-construction affine, alors m/k aussi (on prend la concaténation). Réciproquement, soit $(\overline{a}_i)_{i<\alpha}$ une Σ_0-construction affine de m/l. Par la première partie du lemme, il existe des Σ_0-constructions $(\overline{b}_i)_{i<\beta}$ pour l/k et $(\overline{c}_i)_{i<\gamma}$ pour m/l. La concaténation $(\overline{a}'_i)_{i<\alpha'}$ des deux constructions est une Σ_0-construction de m/k. Le Lemme 3.3.6 nous dit que pour tout $i < \alpha'$, ou bien $\overline{a}'_i \in \mathrm{acl}(k\overline{a}'_{<i})$ ou bien $\mathrm{tp}(\overline{a}'_i/ka'_{<i})$ est non-modulaire. En particulier, $(\overline{b}_i)_{i<\beta}$ est une Σ_0-construction affine de l/k, et $(\overline{c}_i)_{i<\gamma}$ est une Σ_0-construction affine de m/l. □

Fait 3.3.8. *(1) Si $M^* \models T$ est un a-modèle, alors tout type minimal localement modulaire au-dessus de M^* est modulaire.*

(2) Si T est totalement transcendante, alors tout type minimal localement modulaire au-dessus d'un modèle arbitraire est modulaire.

Preuve. Soit p un type localement modulaire et minimal au-dessus du a-modèle M^*. Par la définition d'un a-modèle (voir [Pi96]), $p_0 := p\restriction_{\mathrm{Cb}(p)}$ est réalisé dans M^*. Donc, $p = p_0|M^*$ est modulaire par 3.3.3.

Si T est totalement transcendante et $M \models T$ un modèle arbitraire, on doit raisonner de manière différente. Soit $p \in S(M)$ minimal et localement modulaire. Si p est trivial, il est modulaire et il y n'y a rien à faire. Sinon, p est localement projectif. Il est montré dans [Hr85] qu'il existe alors un espace principal homogène type-définissable (G, X) (avec G et X connexe) tel que si $q \in S(M)$ est le type générique de X, alors $p \not\perp^a_M q$. Or, comme T est totalement transcendante, (G, X) est même définissable. En particulier, X a un point dans M, ce qui montre que $G \simeq X$ au-dessus de M. A fortiori, $p \not\perp^a_M r$, où r est le type générique de G (r est donc modulaire). On en déduit que p est modulaire aussi. En d'autres termes, on vient de montrer que tout type minimal localement modulaire non-modulaire dans une théorie totalement transcendante est isolé au-dessus de sa base canonique C (et donc réalisé dans le modèle premier au-dessus de C). $\square$

Convention. À partir de maintenant, on travaille à l'intérieur d'un modèle $M^* \models T$ ayant la propriété que tout type minimal localement modulaire au-dessus de M^* est modulaire.

Définition 3.3.9. Soit $A \subseteq M^*$. Un ensemble $A \subseteq E \subseteq M^*$ est une Σ_0-*enveloppe affine de* A, si les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) $E = \mathrm{acl}(E)$.

(ii) E/A admet une Σ_0-construction affine.

(iii) Tout type $p \in S(E)$ qui est dans Σ_0 est modulaire.

Lemme 3.3.10. *Pour tout $A \subseteq M^*$, il existe une Σ_0-enveloppe affine de A.*

Preuve. On choisit $A \subseteq E \subseteq M^*$ tel que E/A admette une Σ_0-construction affine et tel que E soit maximal avec cette propriété (c'est possible par le lemme de Zorn). Clairement, on a $E = \mathrm{acl}(E)$ pour un tel E. Soit maintenant $p \in S(E)$ un type dans Σ_0 qui est non-modulaire. Comme $p|M^*$ est modulaire par notre hypothèse sur M^*, alors M^* contient une solution de p par le Fait 3.3.3. Cela contredit la maximalité de E. Donc, E a la propriété (iii), et c'est alors une Σ_0-enveloppe affine de A. $\square$

Lemme 3.3.11. *Soit E une Σ_0-enveloppe affine de A, et soient $A \subseteq B \subseteq E$. Alors, E est une Σ_0-enveloppe affine de B.*

Preuve. On peut supposer que A et B sont algébriquement clos. Par le Lemme 3.3.7(2), E/B admet une Σ_0-construction affine. Donc, E est une Σ_0-enveloppe affine de B. $\square$

Proposition 3.3.12 (Homogénéité des Σ_0-enveloppes affines)**.** *Pour $i = 1, 2$, soient $A \subseteq B_i \subseteq E_i$, où E_i est une Σ_0-enveloppe affine de A. Puis, soit $f : B_1 \simeq_A B_2$ une application $\mathcal{L}(A)$-élémentaire. Alors, f s'étend en une application élémentaire $\tilde{f} : E_1 \simeq E_2$.*

En particulier, il y a une unique Σ_0-enveloppe affine de A à isomorphisme près.

Preuve. On peut supposer que $B_i = \mathrm{acl}(B_i)$ pour $i = 1, 2$. Notons que par le Lemme 3.3.11, E_i est une Σ_0-enveloppe affine de B_i pour $i = 1, 2$. En particulier, si $B_1 \subsetneq E_1$, il existe $e_1 \in E_1 \setminus B_1$ tel que $p_1 := \mathrm{tp}(\bar{e}_1/B_1)$ soit un type non-modulaire dans Σ_0. Soit p_2 la copie de p_1 que l'on obtient en appliquant f aux paramètres. Comme Σ_0 est $\emptyset$-invariant, $p_2 \in \Sigma_0$, et p_2 est non-modulaire. Par ailleurs $p_2|E_2$ est modulaire, car E_2 est une Σ_0-enveloppe affine. Donc, E_2 contient une solution $\bar{e}_2 \models p_2$, par le Fait 3.3.3, et on peut étendre f à $B_1\bar{e}_1$ via $\bar{e}_1 \mapsto \bar{e}_2$. Un argument de va-et-vient termine la preuve. □

Le résultat suivant est une version pour les espaces homogènes du théorème de Hrushovski-Pillay (cf. 3.2.18) qui caractérise les groupes définissables (ou plus généralement type-définissables) monobasés dans une théorie stable. Le résultat est folklore ; pour le montrer, on peut successivement se réduire au cas où le groupe G en question est abélien, puis au cas d'un espace principal homogène, et finalement au résultat correspondant sur les groupes tout court, c'est à dire au théorème de Hrushovski-Pillay.

Pour le formuler, il nous faut introduire une notion. Soit (G, X) un espace homogène. Un *espace sous-homogène* de (G, X) est un espace homogène (H, Y), où $H \leq G$ est un sous-groupe de G et $Y \subseteq X$ un sous-ensemble tels que l'opération de H sur Y provient de l'opération de G sur X. Puis, si (G, X) est un espace homogène, alors, de manière naturelle, $(G^{m+n}, G^m \times X^n)$ est un espace homogène, en posant, pour $(g_1, \dots g_{m+n}) \in G^{m+n}$ et $(\bar{g}', \bar{x}) \in G^m \times X^n$,

$$(g_1, \dots g_{m+n}) \cdot (\bar{g}', \bar{x}) := (g_1 g_1', \dots, g_m g_m', g_{m+1} \cdot x_1 \dots, g_{m+n} \cdot x_m).$$

Fait 3.3.13. *Soit (G, X) un espace homogène qui est type-définissable (au-dessus de B) dans une théorie stable. Sont équivalents (on travaille dans T^{eq}) :*

(1) (G, X) est monobasé.

(2) Pour tout type fort $p(\bar{x})$ étendant $\ulcorner \bar{x} \in G^m \times X^n \urcorner$ (où $m, n \in \mathbb{N}$), il existe un espace sous-homogène (H, Y) type-définissable de $(G^{m+n}, G^m \times X^n)$ tel que H est type-définissable au-dessus de $\mathrm{acl}(B)$ *et tel que p est le type générique de Y.*

(3) Tout sous-ensemble relativement définissable de $G^m \times X^n$ est une combinaison booléenne d'ensembles de la forme Y_0, où (H_0, Y_0) est un espace sous-homogène relativement définissable de $(G^{m+n}, G^m \times X^n)$, avec H relativement $\mathrm{acl}(B)$*-définissable.* □

Proposition 3.3.14. *Soit E égale à sa Σ_0-enveloppe affine, c'est à dire $E =$* $\mathrm{acl}(E)$*, et tout type $p \in \Sigma_0$ basé sur E est modulaire. Puis, soit (G, X) un espace homogène monobasé et type-définissable au-dessus de E, tel que le type générique (principal) de G soit dans Σ et tel que X soit dans $\mathcal{S}$ avec* $\mathrm{U}(X) < \omega$*. Alors, $X \cap E \neq \emptyset$, c'est à dire X a un point dans E.*

Preuve. On sait que dans un espace homogène, tout type est analysable (même interne) dans le type générique du groupe. Donc, si (G, X) satisfait aux hypothèses de la proposition, alors tout type d'un uplet dans X^n est dans Σ.

On peut supposer que $\mathrm{U}(X) = n > 0$, car sinon, X serait algébrique et aurait alors des points dans $E = \mathrm{acl}(E)$.

Quitte à passer à la composante connexe G^0 de G, et quitte à choisir une G^0-orbite dans X (chaque G^0-orbite est E-définissable car $E = \mathrm{acl}(E)$ et tout type d'un uplet dans $\mathcal{S}$ au-dessus d'un ensemble acl-clos dans $\mathcal{S}$ est stationnaire par hypothèse), on peut supposer que G et X sont connexes. Alors, G est abélien, car c'est un groupe monobasé connexe.

Par compacité, on sait que l'opération de G sur X est relativement définissable (en tant que sous-ensemble de $G \times X \times X$), disons par $\varphi(\overline{z}, \overline{x}, \overline{x}')$. On en déduit que le stabilisateur $G_{\overline{a}}$ d'un élément $\overline{a} \in X$ (qui est égal à $G_{\overline{a}'}$ pour tout $\overline{a}' \in X$ car G est abélien) est un sous-groupe relativement définissable de G. Il suffit de considérer le type générique $p(\overline{x}) \in S(E)$ de X et de prendre la formule $\theta(\overline{z}) := \mathrm{d}_p\, \varphi(\overline{z}, \overline{x}, \overline{x})$ qui exprime $\models \theta(\overline{g})$ si et seulement si pour tout $\overline{a} \models p|\overline{g}$ on a $\models \varphi(\overline{g}, \overline{a}, \overline{a})$. On en déduit que $G/G_{\overline{a}}$ est type-définissable dans G^{eq}. On peut donc supposer que (G, X) est principal homogène avec G connexe. Ainsi, X reste dans $\mathcal{S}$.

Soit $\overline{a} \in X$ générique dans X au-dessus de E, et soit $\overline{a}_1 \in \mathrm{acl}(E\overline{a})$ tel que $\mathrm{tp}(a_1/E) \in \Sigma_0$. Un tel $\overline{a}_1$ existe par l'hypothèse sur la coordinatisation. On peut même le choisir dans X^{eq}. Comme E est une Σ_0-enveloppe affine, $p_1 := \mathrm{tp}(\overline{a}_1/E)$ est nécessairement modulaire, donc projectif car il n'y a pas de type trivial minimal dans un espace homogène monobasé (par 3.3.13, par exemple), et (G, X) est monobasé. Par [Hr85], on peut supposer que p_1 est le type générique d'un groupe minimal connexe et modulaire H (éventuellement en dehors de $\mathcal{S}$). De plus, par le Fait 3.3.13, $\mathrm{tp}(\overline{a}, \overline{a}_1/E)$ est le type générique d'un $\tilde{X}$, où $(\tilde{G}, \tilde{X})$ est un espace sous-homogène de $(G \times H, X \times H)$. Soit π_X la projection de $X \times H$ sur X, et π_H celle sur H. Par construction, $\pi_X(\tilde{X})$ est générique dans X, de même $\pi_H(\tilde{X})$ est générique dans H. Comme $\pi_X(\tilde{X})$ est un espace sous-homogène de X et X est connexe, on a donc $\pi_X(\tilde{X}) = X$. Puis, $\pi_H(\tilde{X}) = H$ suit d'un argument similaire.

Posant $G' := \tilde{G} \cap (G \times 0)$ et $X' := \tilde{X} \cap (X \times 0)$, on réduit le problème de l'existence d'un point de X dans E à l'espace homogène (G', X'). On a $\mathrm{U}(X') = n - 1$ par les inégalités de Lascar (X' est la fibre de $\pi_X : \tilde{X} \twoheadrightarrow H$ au-dessus de 0, donc de même rang que la fibre au-dessus d'un élément générique de H, car chaque deux fibres de π_X sont isomorphes). On termine par une induction sur n.

Pour résumer, par une induction sur i, nous avons trouvé un espace sous-homogène (type-définissable au-dessus de E) (G_i, X_i) de (G, X) tel que $\mathrm{U}(X_i) = n - i$. L'ensemble X_n contient forcément un point dans $E = \mathrm{acl}(E)$, car X_n est fini et non-vide. $\square$

3.3.2 Enveloppes admissibles dans la fusion libre

Nous revenons à la théorie de la fusion libre T_ω dans le Contexte 3.1.1, en adoptant la Convention 3.2.5. Rappelons les hypothèses : on considère un contexte de fusion (T_0, T_1, T_2), où T_0 est une expansion inessentielle de $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$ et $T_i \supseteq T_0$ une expansion fortement minimale qui renforce la prégéométrie ($i = 1, 2$). Le bon contrôle est automatique dans ce cas (car $\mathrm{dcl}_0 = \mathrm{acl}_0$).

Les résultats suivants seraient également vrais en dehors du cas rouge, mais le cadre de 3.2.5 suffira à nos fins, et nous permet de simplifier l'exposition.

Le lemme suivant rassemble quelques résultats :

Lemme 3.3.15. *Soit T_ω la théorie de la fusion libre.*

(1) Tout type réel au-dessus d'un ensemble $K = \mathrm{cl}_\omega(K)$ est stationnaire.

(2) Soit $p = \mathrm{tp}(\overline{a}/B)$ un type parasite (donc $\overline{a}, B$ réels). Alors on a :
   - *(a)* $\mathrm{RM}(\overline{a}/B) = \mathrm{U}(\overline{a}/B)$
   - *(b) p est monobasé. De plus, si $\mathrm{cl}_\omega(B)$ est finiment engendré, alors p est isolé.*
   - *(c) Il existe $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n \in \mathrm{cl}_\omega(B\overline{a}) =: l$, où $n = \mathrm{U}(\overline{a}/B)$, tels que $l = \mathrm{cl}_\omega(k\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_n)$ et $\mathrm{tp}_\omega(\bar{\alpha}_i / \mathrm{cl}_\omega(k\bar{\alpha}_{<i}))$ est admissible pour tout i.*

(3) Tout type réel qui est analysable en des types parasites est parasite.

(4) Tout type admissible p est fortement minimal. Si de plus $p \in S^n(k)$ pour une fusion k finiment engendrée, alors p est isolé par une formule fortement minimale ω-catégorique. La prégéométrie de p est localement finie.

En particulier, T_ω rentre dans le cadre de 3.3.1 quand $\mathcal{S}$ est la sorte des réels, Σ la famille des types parasites et Σ_0 celle des types admissibles.

Preuve. La partie (1) est le Lemme 3.1.8, et (2a) suit de 3.1.9. Puis, 2.4.14 combiné avec 3.1.6 donne (2b). Le Lemme de décomposition 2.2.11 et la définition d'un type admissible montrent (2c). Quant à (3), c'est un calcul de d-dimension qui le donne. Finalement, (4) suit par exemple de 3.1.12. □

On présente brièvement les conséquences de la théorie des Σ_0-enveloppes affines développée dans la sous-section précédente dans le contexte de la fusion libre.

Définition 3.3.16. Soit $A \subseteq K \models T_\omega$. Une fusion $A \subseteq E \subseteq K$ est une *enveloppe affine admissible* de A, si les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) $E = \mathrm{cl}_\omega(E)$.

(ii) E/A admet une *construction affine admissible*, c.à.d. il existe une suite d'uplets $(\overline{a}_i)_{i<\alpha}$ dans E telle que $E = A \cup \bigcup_{i<\alpha} \overline{a}_i$, et pour tout $i < \alpha$, $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}_i / A\overline{a}_{<i})$ est ou bien algébrique ou bien admissible et non-modulaire.

(iii) Tout type admissible au-dessus de E est modulaire.

Notons que dans la Définition 3.3.16, on peut travailler dans un modèle quelconque de T_ω (par le Fait 3.3.8), puisque T_ω est ω-stable.

Lemme 3.3.17. *(1) (Existence) Pour tout ensemble $A \subseteq K \models T_\omega$, il existe $A \subseteq E \subseteq K$, tel que E soit une enveloppe affine admissible de A.*

(2) Soit E une enveloppe affine admissible de A, et soit $A \subseteq B \subseteq E$. Alors, E est une enveloppe affine admissible de B. De plus, tout type admissible $p \in S(B)$ réalisé dans E est non-modulaire.

(3) *(Homogénéité) Soient $A \subseteq B_i \subseteq E_i$ pour $i = 1, 2$, où E_1 et E_2 sont deux enveloppes affines admissibles de A. Puis, soit $f : B_1 \to B_2$ une application $\mathcal{L}(A)$-élémentaire. Alors, f s'étend en une application $\mathcal{L}$-élémentaire $\tilde{f}$ de E_1 sur E_2.*

(4) *Soit (G, X) un espace homogène (réel) définissable au-dessus de A, tel que le type générique de X soit parasite. Puis, soit E une enveloppe affine admissible de A. Alors X a un point dans E.* □

En ce qui concerne les cosettes de sous-groupes définissables de $(K^n, +)$, il y a un résultat plus fort que la partie (4) du Lemme 3.3.17. En effet :

Corollaire 3.3.18. *Soient $A \subseteq K$ et N une cosette d'un sous-groupe de $(K^n, +)$, avec N définissable au-dessus de A. Puis, soit E une enveloppe affine admissible de A. Alors, N a un point dans E.*

Preuve. Soit $G \leq (K^n, +)$ un sous-groupe et N une cosette de G, avec (G, N) type-définissable au-dessus de E (on peut supposer que $A = E$). Comme nous l'avons déjà fait, on réduit le problème de l'existence d'un point dans E au cas où G est connexe.

Soit $\bar{g} \in G$ générique au-dessus de E, et soit $\mathrm{d}(\bar{g}/E) = d$. On peut supposer que $\bar{g}' := (g_1, \ldots, g_d)$ est une d-base pour $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ au-dessus de E. Alors, l'inclusion $\iota : K^{n-d} \hookrightarrow K^n$, $(x_1, \ldots, x_{n-d}) \mapsto (0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_{n-d})$, induit une surjection $\bar{\iota} : K^{n-d} \twoheadrightarrow K^n/G$. En effet : Écrivons $K^n = \pi_1(K^n) \oplus \pi_2(K^n)$, où $\pi_1 : K^n \to K^d$ est la projection sur les d premières coordonnées et $\pi_2 : K^n \to K^{n-d}$ sur les $(n-d)$ dernières. Comme $\pi_1(G)$ contient le générique de $\pi_1(K^n)$, il contient $\pi_1(K^n)$. Alors $K^n = G + \iota(K^{n-d})$.

On pose $G_0 := \ker(\bar{\iota}) = \iota^{-1}(G)$ et $N_0 := \bar{\iota}^{-1}(\{N\}) = \iota^{-1}(N)$ (en considérant $\{N\}$ et $\{G\}$ comme éléments de K^n/G). La paire (G_0, N_0) est un espace homogène (définissable au-dessus de E) tel que tout type dans N_0 est parasite. Il existe donc $\bar{e}'' \in N_0 \cap E$ par le Lemme 3.3.17, et $\bar{e} := \iota(\bar{e}'')$ est un point de N dans E. □

Soit $\mathcal{E}$ la classe des fusions L telles que tout type admissible au-dessus de L soit modulaire — une fois que L est plongée fortement dans un modèle de T_ω.

Proposition 3.3.19. *La classe $\mathcal{E} \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_0$ est élémentaire. Elle est axiomatisée par des formules $\forall\exists$.*

Preuve. Pour simplifier, on suppose dans la preuve que T_1 et T_2 ont la DMP, même si le résultat est vrai sans cette hypothèse. Pour pouvoir garantir définissablement la modularité de tout type admissible, nous utilisons la Proposition 3.2.11, à savoir qu'un type admissible p est localement projectif si et seulement si $p \restriction_{\mathcal{L}_i}$ est un cosette type pour $i = 1, 2$. Si tel est le cas, alors Δp est le type générique du groupe fortement minimal $\mathrm{stab}(p)$.

On considère un type admissible $q = \Delta q \in S^n(k)$, et on pose $q_i := q \restriction_{\mathcal{L}_i}$. Comme dans la preuve du Lemme 3.2.15 on trouve des $\mathcal{L}_i$-formules $\varphi_i(\overline{x}, \overline{z})$ et $\theta_i(\overline{z})$ telles que, posant $\varphi(\overline{x}, \overline{z}) := \varphi_1(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \varphi_2(\overline{x}, \overline{z})$ et $\theta(\overline{z}) := \theta_1(\overline{z}) \wedge \theta_2(\overline{z})$, on obtient :

(i) Si $\overline{b}' \models \theta_i(\overline{z})$, alors $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b}')$ est non-vide de degré de Morley 1.

(ii) (φ, θ) est une famille admissible, c.à.d. pour tout $\overline{b}' \models \theta(\overline{z})$, la formule $\varphi(\overline{x}, \overline{b}')$ est fortement minimale, et son unique type générique $q_{\overline{b}'}$ est admissible. De plus, $q_{\overline{b}'} \restriction_{\mathcal{L}_i}$ est le type générique de $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b}')$ pour $i = 1, 2$.

(iii) q est codé par (φ, θ).

Supposons que $q = q_{\overline{b}}$ pour $\overline{b} \models \theta(\overline{z})$. Soit $G_i(\overline{x}, \overline{z})$ une $\mathcal{L}_i$- formule telle que si $\models \theta_i(\overline{b}')$, alors $G_i(\overline{x}, \overline{b}')$ définit le stabilisateur du type générique de $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b}')$ (une telle formule existe toujours). Quitte à renforcer $\theta_i(\overline{z}) \in \mathrm{tp}_i(\overline{b}/\emptyset)$, en utilisant 3.2.7, on peut supposer de plus :

(iv) Si $\models \theta(\overline{b}')$, alors $\mathrm{RM}_{T_i}(G_i(\overline{x}, \overline{b}') \Delta \varphi_i(\overline{x}, \overline{b}') < \mathrm{RM}_{T_i}(\varphi_i(\overline{x}, \overline{b}'))$, c'est à dire les formules $G_i(\overline{x}, \overline{b}')$ et $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b}')$ coïncident génériquement.

Pour tout $(\varphi_1, \theta_1, \varphi_2, \theta_2, G_1, G_2)$ comme ci-dessus satisfaisant (i–iv), on met un axiome de la forme suivante :

$$(\epsilon)\ \ \forall \overline{z} \forall \overline{y} \exists \overline{x} \big[\theta(\overline{z}) \to G_1(\overline{x}) \wedge G_2(\overline{x} - \overline{y}, \overline{z})\big]$$

Notons d'abord que si $\models \theta(\overline{b}')$, en combinant (ii) et (iv), on voit que si q'_i est le type générique de $G_i(\overline{x}, \overline{b}')$ au-dessus d'une fusion k contenant $\overline{b}'$, alors $(q'_1 \cup q'_2)$ (plus "autosuffisant") détermine un type admissible $q' = \Delta q' \in S^n(k)$. Pour $\overline{c} \in k^n$, nous avons vu que c'est également le cas pour les types génériques de $G_1(\overline{x}, \overline{b}')$ et $G_2(\overline{x} - \overline{c}, \overline{b}')$ (c'est exactement le type admissible $p_{+\overline{c}}$, voir page 73). En particulier, $G_1(\overline{x}, \overline{b}') \wedge G_2(\overline{x} - \overline{c}, \overline{b}')$ définit une cosette du groupe fortement minimal $G(\overline{x}, \overline{b}') := G_1(\overline{x}, \overline{b}') \wedge G_2(\overline{x}, \overline{b}') = \mathrm{stab}(q')$.

Montrons qu'une fusion L est dans $\mathcal{E}$ précisément si elle est modèle de tous les axiomes de la forme (ϵ). Supposons d'abord que $L \in \mathcal{E}$, avec $L \leq K^* \models T_\omega$, et soit $\overline{b}', \overline{c} \in L$ avec $\models \theta(\overline{b}')$. Par le paragraphe précédent, posant $N_{\overline{c}} := G_1(\overline{x}, \overline{b}') \wedge G_2(\overline{x} - \overline{c}, \overline{b}')$, on voit que $(G(\overline{x}, \overline{b}'), N_{\overline{c}})$ est un espace homogène L-définissable et parasite. Alors il existe un $\overline{a} \in N_{\overline{c}}$ avec $\overline{a} \in L$, par 3.3.17(4). La fusion L est donc un modèle du schéma d'axiomes (ϵ).

Réciproquement, soit L une fusion satisfaisant à tous les axiomes de la forme (ϵ), et soit $p \in S^n(L)$ un type admissible localement projectif. Par le Fait 3.2.9, p est le type générique d'une cosette N de $G := \mathrm{stab}(p)$, et Δp est le type générique de G. Le cas $q := \Delta p$ est alors traité dans un de nos axiomes (ϵ). Soient $G_i(\overline{x}, \overline{b}) = \mathrm{stab}_i(q \restriction_{\mathcal{L}_i})$, où on suppose donnés $(\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2, G_1, G_2)$ satisfaisant (i-iv) pour q. Soit N_i la cosette de $G_i(\overline{x}, \overline{b})$ contenant N. On a donc $N = N_1 \cap N_2$, et il existe $\overline{c}_i \in N_i^L$, car $L \models T_i$. Posons $\overline{c} := \overline{c}_2 - \overline{c}_1$. Alors, pour tout n-uplet $\overline{a}$, on a $\models G_1(\overline{a}, \overline{b}) \wedge G_2(\overline{a} - \overline{c}, \overline{b})$ si et seulement si $\overline{a} + \overline{c}_1 \in N_1 \cap N_2 = N$. Comme $\overline{c}_i \in L$, l'axiome correspondant fournit un point dans N^L.

En conséquence, $p \not\perp^a_L \Delta p$, et p est modulaire. $\square$

3.4 Le collapse dans le contexte de fusion abélien

Dans cette section, nous montrons que si (T_0, T_1, T_2) est un contexte de fusion abélien, il existe une complétion fortement minimale $\tilde{T}$ de $T_1 \cup T_2$, c'est à dire on peut *fusionner* T_1 et T_2 (au-desus de T_0) dans une théorie fortement minimale. En fait, nous trouverons $\tilde{T}$ comme $\mathrm{Th}(M)$, où $M \leq K^* \models T_\omega$ est bien choisie, à l'aide de la théorie des enveloppes. Le résultat en question est le Théorème 3.4.7. Notons que dans [Ha04], Hasson obtient une version abstraite de ce théorème qui généralise 3.4.7

On se place donc dans le contexte de fusion abélien, où T_1 et T_2 sont des expansions fortement minimales monobasées de la théorie ω-catégorique T_0, qui est une expansion inessentielle de $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$. Quitte à ajouter des constantes aux langages, on peut supposer que $\mathrm{dcl}_i(\emptyset) = \mathrm{acl}_i(\emptyset)$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$. Comme avant, T_ω dénote la fusion libre de T_1 et T_2 au-dessus de T_0. Cette théorie est monobasée (voir 3.2.19), et tout type admissible est non-orthogonal à un type admissible p dont les restrictions p_i à $\mathcal{L}_i$ $(i = 1, 2)$ sont des sous-groupe types basés sur $\emptyset$, et p_i est alors le type générique d'un sous-groupe $\mathcal{L}_i(\emptyset)$-définissable connexe G_i de $(V_0, +)^{n_p}$. Ici, $(V_0, +)$ dénote le groupe additif du $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel $\mathcal{L}_0$-définissable sous-jacent. Donc, $p(\overline{x})$ est le type générique d'un groupe fortement minimal (localement fini) $G = G_1 \cap G_2$, et il peut être isolé par la formule sans quanteurs

$$G_1(\overline{x}) \wedge G_2(\overline{x}) \wedge \ulcorner \mathrm{d}_0(\overline{x}) = n_p \urcorner.$$

Soit $\mathcal{D}'$ l'ensemble (borné !) des types admissibles de cette forme. Par le Lemme 3.2.3 et le Fait 3.2.2, pour $p, q \in \mathcal{D}'$ on a $p \not\perp q$ ssi $q = \Gamma \cdot p$ pour un $\Gamma \in GL_{n_p}(\mathbb{F}_q)$ (la translation qui fait partie du résultat général de 3.2.3 n'apparaît pas, car on a affaire à des génériques de groupes). On choisit un système de représentants $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$ des classes de non-orthogonalité dans $\mathcal{D}'$. Avec l'intention manifeste de retrouver la prégéométrie donnée par $\mathrm{cl_d}$ dans une théorie fortement minimale, on cherche une théorie complète de fusions dans laquelle la clôture algébrique soit donnée par $\mathrm{cl_d}$. La théorie qu'on obtient sera la théorie *collapsée*. Il faut donc borner le nombre de réalisations de tout type admissible et définir une classe restreinte $\mathcal{C}^c \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_0$. Une formalisation de la notion de collapse sera donnée dans la Définition 3.5.1.

On considère d'abord des fonctions $\mu : \mathcal{D} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (on verra plus tard que le cas où $\mu(p) < \infty$ pour tout $p \in \mathcal{D}$ nous intéresse le plus, car il mène à un collapse de T_ω). Pour une telle fonction μ, on pose

$$\tilde{\mathcal{C}}_0^\mu := \{M \in \tilde{\mathcal{C}}_0 \mid \dim_M(p) \leq \mu(p) \text{ pour tout } p \in \mathcal{D}\}.$$

Comme d'habitude, soit $\mathcal{C}_0^\mu := \tilde{\mathcal{C}}_0^\mu \cap \mathcal{C}_0$ la classe des fusions finiment engendrées dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^\mu$.

Lemme 3.4.1. *La classe $\tilde{\mathcal{C}}_0^\mu$ est élémentaire.*

Preuve. Tous les types dans $\mathcal{D}$ sont localement finis, isolés et basés au-dessus de $\emptyset$ (car $\mathrm{dcl}_i(\emptyset) = \mathrm{acl}_i(\emptyset)$), et donc $\dim_M(p) \leq n$ est une condition définissable pour tout n (explicitement, on a $\mathrm{d}_0(p^M) = n_p \cdot \dim_M(p)$, si n_p est la longueur de p). □

Maintenant, on pourrait continuer en montrant directement que la classe $(\tilde{\mathcal{C}}_0^\mu, \leq)$ a la propriété d'amalgamation, puis on étudierait les fusions dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^\mu$ qui sont riches pour $(\mathcal{C}_0^\mu, \leq)$. Cette voie est prise dans [HH06]. Mais nous procédons différemment : nous construisons directement l'objet de notre désir, c'est à dire une structure dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^\mu$ qui est riche pour $(\mathcal{C}_0^\mu, \leq)$.

On travaille dans un modèle suffisamment saturé K^* de T_ω. À l'intérieur de K^*, on construit une fusion dénombrable $M^\mu \leq K^*$. Dans K^*, on choisit

– pour $p \in \mathcal{D}$ avec $\mu(p) < \infty$: une suite de Morley $(\bar{b}_i^p)_{0 \leq i < \mu(p)}$ de p, puis $B_p := \bigcup_{i<\mu(p)} \bar{b}_i^p$
– pour $p \in \mathcal{D}$ avec $\mu(p) = \infty$: une suite de Morley $(\bar{b}_i^p)_{i<\omega}$ de p, puis $B_p := \bigcup_{i<\omega} \bar{b}_i^p$
– une suite $(b_i^{\mathfrak{g}})_{i<\omega}$ d'éléments d-génériques et indépendants (c'est à dire une suite de Morley de $\mathfrak{g}$ de longueur ω), puis $B_{\mathfrak{g}} := \bigcup_{i<\omega} b_i^{\mathfrak{g}}$.

Comme les types dans $\mathcal{D} \cup \{\mathfrak{g}\}$ sont 2 à 2 orthogonaux, les composantes de toutes ces suites forment un système d'uplets indépendants, c'est à dire $\bigcup_{q \in \mathcal{D} \cup \{\mathfrak{g}\}} B_q$ réalise le type

$$\Big(\bigotimes_{\substack{p \in \mathcal{D} \\ \mu(p) < \infty}} p^{(\mu(p))} \Big) \otimes \Big(\bigotimes_{\substack{p \in \mathcal{D} \\ \mu(p) = \infty}} p^{(\omega)} \Big) \otimes \mathfrak{g}^{(\omega)}.$$

Soit $B := \mathrm{cl}_\omega(\bigcup_{q \in \mathcal{D} \cup \{\mathfrak{g}\}} B_q)$, et soit $M^\mu \leq K^*$ une enveloppe affine admissible de B.

Lemme 3.4.2. *Avec les notations ci-dessus, on a :*

(1) $M^\mu \in \tilde{\mathcal{C}}_0^\mu$ *; plus précisément, pour* $p \in \mathcal{D}$ *on a* $\dim_{M^\mu}(p) = \mu(p)$ *si ce dernier est fini, sinon* $\dim_{M^\mu}(p) = \aleph_0$. *De plus,* $\mathrm{d}(M^\mu) = \dim_{M^\mu}(\mathfrak{g}) = \aleph_0$.

(2) Soit $k \leq M^\mu$ *et* $k \leq l \in \mathcal{C}_0^\mu$. *Alors il existe un* k*-plongement fort de* l *dans* M^μ.

*(3) L'*âge fort *de* M^μ, *c'est à dire l'ensemble des fusions finiment engendrées et autosuffisantes dans* M^μ, *est égal à* $\mathcal{C}_0^\mu$.

(4) La classe $(\mathcal{C}_0^\mu, \leq)$ *a la propriété d'amalgamation et est connexe, et* M^μ *est la limite de Fraïssé de* $(\mathcal{C}_0^\mu, \leq)$.

Preuve. D'abord, $\mathrm{d}(M^\mu) = \mathrm{d}(B) = \aleph_0$ est clair, puisque $\mathrm{d}(M^\mu/B) = 0$. Puis, on rappelle que tout $p \in \mathcal{D}$ est modulaire. A fortiori, $p|B$ est modulaire aussi, et il n'y a donc pas de réalisations de $p|B$ dans M^μ, par 3.3.17(2). Cela montre que $\dim_{M^\mu}(p) = \dim_B(p)$ pour tout $p \in \mathcal{D}$. Comme $\dim_B(p) = \mu(p)$ si $\mu(p) < \infty$ et $\dim_B(p) = \aleph_0$ sinon, on a montré (1).

Pour prouver (2), on note d'abord

$(*)$ Soit $k \in \mathcal{C}_0$. Alors, $\mathrm{d}(k)$ et $\dim_k(p)$ (pour tout $p \in \mathcal{D}$) sont finis.

Dans la situation de (2), on peut supposer, par le Lemme de décomposition 2.2.11, que l/k est générique ou primitive. Si l/k est générique, l se k-plonge fortement dans M^μ car $\mathrm{d}(M^\mu) = \aleph_0 > \mathrm{d}(k)$, par (1) et $(*)$. Soit donc l/k une extension primitive, et $q \in S^n(k)$ un type admissible tel que l soit contrôlée (au-dessus de k) par une réalisation $\overline{a} \models q$.

Cas 1 : q est non-modulaire. Comme M^μ est une enveloppe affine admissible, $q|M^\mu$ est modulaire. Par le Fait 3.3.3, il existe donc une réalisation $\overline{a}' \models q$ dans M^μ. Cela fournit un k-plongement (fort) de l dans M^μ.

Cas 2 : q est modulaire. Donc, $q \not\perp_k^a p|k$ pour le type $p \in \mathcal{D}$ avec $q \not\perp p$. Il suffit de montrer que $\dim_k(p) < \dim_{M^\mu}(p)$ (car il existe alors $\overline{a}' \models p$ dans M^μ, et $\overline{a} \mapsto \overline{a}'$ s'étend en un k-plongement fort de l dans M^μ). Si $\mu(p) = \infty$, alors $\dim_k(p) < \aleph_0 = \dim_{M^\mu}(p)$ par (1) et $(*)$. Sinon, on a $\mu(p) \in \mathbb{N}$, et alors $\dim_k(p) < \dim_k(p) + 1 = \dim_l(p) \leq \mu(p) = \dim_{M^\mu}(p)$. Cela termine la preuve de (2).

Montrons (3). Par (1), $M^\mu \in \tilde{\mathcal{C}}_0^\mu$ et l'âge fort de M^μ est donc contenu dans $\mathcal{C}_0^\mu$. Quant à l'autre inclusion, on se donne $l \in \mathcal{C}_0^\mu$. Posons $k := \langle \emptyset \rangle$. Comme $k \leq l$ et $k \leq M^\mu$, on peut k-plonger fortement l dans M^μ par (2), ce qui montre que l est dans l'âge fort de M^μ.

Pour établir la propriété d'amalgamation dans $(\mathcal{C}_0^\mu, \leq)$, on se donne $k \leq l$ et $k \leq m$ avec $l, m \in \mathcal{C}_0^\mu$. Par (3), on peut supposer que $m \leq M^\mu$. Puis, on utilise (2) pour k-plonger fortement l dans M^μ. Cela fournit l'amalgame cherché. Finalement, M^μ est riche pour $(\mathcal{C}_0, \leq)$ par (2). Enfin, une enveloppe affine admissible d'un ensemble dénombrable A est dénombrable (par exemple car on peut la retrouver au sein du modèle A-premier de T_ω), ce qui montre que M^μ est dénombrable. □

Soit T^μ la $\mathcal{L}$-theory de M^μ. Comme avant, toute autre fusion $M' \in \tilde{\mathcal{C}}_0^\mu$ qui est riche pour $(\mathcal{C}_0^\mu, \leq)$ est $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalente à M^μ, en particulier elle est modèle de T^μ. Nous allons voir que les modèles ω-saturés de T^μ sont exactement les fusions riches pour $(\mathcal{C}_0^\mu, \leq)$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^\mu$. Comme dans les autres preuves, ce résultat est obtenu en axiomatisant T^μ.

On définit la $\mathcal{L}$-théorie $T'^\mu := T'^\mu(1,2,3,4)$ via :

$T'^\mu(1)$: $\mathrm{Th}(\tilde{\mathcal{C}}_0)$

$T'^\mu(2)$: $\dim(p) = \mu(p)$ pour tout $p \in \mathcal{D}$ avec $\mu(p) < \infty$, et $\dim(p) \geq m$ (tout $m \in \mathbb{N}$) pour $p \in \mathcal{D}$ avec $\mu(p) = \infty$.

$T'^\mu(3)$: Des axiomes qui expriment que si $M \models T'^\mu(3)$ est une fusion, alors tout type admissible au-dessus de M est modulaire.

$T'^\mu(4)$: $\forall \overline{z} \exists x \neg\tau(x, \overline{z})$ pour toute formule existentielle à quantification bornée τ telle que $\models \tau(a, \overline{b})$ implique $\mathrm{d}(a/\overline{b}) = 0$.

Notons que le schéma d'axiomes (3) est du premier ordre par la Proposition 3.3.19. On peut donner une version plus concrète de (3). Pour tout $p \in \mathcal{D}$ (tel que $p \restriction_{\mathcal{L}_i}$ est l'unique type générique du groupe $\mathcal{L}_i(\emptyset)$-définissable $G_i(\overline{x})$), il suffit de mettre un axiome de la forme $\forall \overline{y} \exists \overline{x} G_1(\overline{x}) \wedge G_2(\overline{x} - \overline{y})$.

Puis, comme d'habitude, le schéma d'axiomes (4) garantit que $\mathrm{d}(M)$ est infini pour tout modèle ω-saturé M de T'^{μ}.

Lemme 3.4.3. *Les fusions riches dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mu}$ sont exactement les modèles ω-saturés de la théorie T'^{μ}. En particular, T'^{μ} est égale à T^{μ} et complète.*

Preuve. On a $M^{\mu} \models T'^{\mu}(1,2,4)$ par le Lemme 3.4.2. Puis, $M^{\mu} \models T'^{\mu}(3)$ est vrai par construction, et M^{μ} est donc un modèle de T'^{μ}.

Par les axiomes, si $M' \models T'^{\mu}$, alors $\dim_{M'}(p) = \mu(p)$ pour tout $p \in \mathcal{D}$ avec $\mu(p) < \infty$. Par contre, si $\mu(p) = \infty$ pour un $p \in \mathcal{D}$, alors nécessairment $\dim_{M'}(p) \geq \aleph_0$. Si de plus M' est ω-saturé, alors $\mathrm{d}(M') \geq \aleph_0$ par $T'^{\mu}(4)$.

Pour $p \in \mathcal{D}$, soit $(\bar{b}_i'^{p})_{i<\dim_{M'}(p)}$ une base de $p^{M'}$ et $B_p' := \bigcup_i \bar{b}_i'^{p}$. De même, soit $(b_i'^{\mathfrak{g}})_{i<\mathrm{d}(M')}$ une d-base de M' et $B_{\mathfrak{g}}'$ l'ensemble des $b_i'^{\mathfrak{g}}$. Puis, on pose $B' := \mathrm{cl}_{\omega}(\bigcup_{q\in\mathcal{D}\cup\{\mathfrak{g}\}} B_q')$. Alors :

(†) M' est une enveloppe affine admissible de B'.

Pour prouver (†), il suffit de montrer que M'/B' admet une construction admissible affine, puisque $M' \in \mathcal{E}$ suit de $T'^{\mu}(1,3)$. Comme $\mathrm{d}(M'/B') = 0$, on trouve une chaîne de fusions $(k_i)_{i<\alpha}$ telle que $k_0 = B'$, $\bigcup_{i<\alpha} k_i = M'$, $k_\lambda = \bigcup_{i<\lambda} k_i$ pour tout ordinal limite $\lambda < \alpha$ et telle que k_{i+1}/k_i soit une extension primitive pour tout i avec $i+1 < \alpha$. Pour tout tel i, il existe $p \in \mathcal{D}$ avec $\mathrm{tp}_{\omega}(k_{i+1}/k_i) \not\perp p$. Si $\mathrm{tp}_{\omega}(k_{i+1}/k_i)$ était modulaire, on aurait donc $\mathrm{tp}_{\omega}(k_{i+1}/k_i) \not\perp^a_{k_i} p|k_i$, ce qui contredirait le fait que $k_i \supseteq B'$ contient une base de $p^{M'}$. Donc, $\mathrm{tp}_{\omega}(k_{i+1}/k_i)$ est non-modulaire pour tout i. On peut fabriquer une construction admissible affine de M'/B' à partir de $(k_i)_{i<\alpha}$.

Par (†), un modèle ω-saturé $M' \models T'^{\mu}$ s'obtient à partir de bases $(B_q')_{q\in\mathcal{D}\cup\{\mathfrak{g}\}}$ précisément comme M^{μ} à partir des bases B_q. Si B_q est fini, B_q' l'est aussi, et on a $|B_q| = |B_q'|$. Si B_q est de cardinalité $\aleph_0$, alors B_q' est infini aussi (éventuellement de cardinalité $\kappa_q' > \aleph_0$). Quoiqu'il en soit, on peut répéter, mot par mot, la preuve du Lemme 3.4.2 avec le modèle ω-saturé M', en remplaçant $\aleph_0$ par κ_q'. En particulier, on obtient que M' est riche pour $(\mathcal{C}_0, \leq)$.

Cela termine la preuve, puisqu'une structure $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalente à une structure ω-saturée est ω-saturée. □

On obtient comme dans la fusion libre (cf. 3.1.5) :

Corollaire 3.4.4 (Élimination de quanteurs)**.**

(1) Pour $i = 1,2$, soient $A_i \leq M_i \models T^{\mu}$. Alors, $\mathrm{tp}_{T^{\mu}}(A_1) = \mathrm{tp}_{T^{\mu}}(A_2)$ si et seulement si $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(A_1) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(A_2)$.

(2) Soit $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ l'expansion par définitions introduite dans 2.3.21. Alors, T^{μ} élimine les quanteurs dans $\mathcal{L}^*$. □

Remarque 3.4.5. *Soit $k \leq l \in \mathcal{C}_0^{\mu}$ avec l/k générique. Alors on peut approximer l/k par des extensions parasites* dans *$\mathcal{C}_0^{\mu}$. Plus précisément, pour toute $\mathcal{L}$-formule $\tau(x,\bar{z})$ existentielle à quantification bornée telle que $\models \tau(a',\bar{b}')$ implique $\mathrm{d}(a'/\bar{b}') = 0$ et pour tout uplet $\bar{b} \in k$ il existe une extension parasite l'/k telle que $l' \in \mathcal{C}_0^{\mu}$ et $l' \models \neg\tau(a',\bar{b})$ pour un $a' \in l'$.*

En conclusion, $T'^{\mu}(4)$ *est une conséquence de* $T'^{\mu}(1,2,3)$*, et* T^{μ} *admet une axiomatisation* $\forall\exists$.

Preuve. Par le résultat 3.4.4 sur l'élimination des quanteurs, au-dessus de tout ensemble de paramètres, il y a un unique type d'élément d-générique dans T^{μ}. Par abus de langage, on continuera de le noter $\mathfrak{g}$. Soit $k \leq M \models T^{\mu}$ (avec k finiment engendrée) et $\overline{b}$ une d-base de k. Puis, soit $\Phi_{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des formules de la forme $\neg\tau(x,\overline{b})$, où $\tau(x,\overline{z})$ est une $\mathcal{L}$-formule existentielle à quantification bornée telle que $\models \tau(a',\overline{b}')$ implique $\mathrm{d}(a'/\overline{b}') = 0$. Tout élément a satisfaisant $\Phi_{\mathfrak{g}}$ sera d-générique au-dessus de k, par le Lemme 2.3.5 .

On observe que si $\overline{a} \in L_1 \leq L_2$ et $\tau(\overline{x})$ est une formule (existentielle) à quantification bornée, alors $L_1 \models \tau(\overline{a})$ ssi $L_2 \models \tau(\overline{a})$.

Il suffit donc de montrer :

$(*)$ Pour tout $\neg\tau(x,\overline{b}) \in \Phi_{\mathfrak{g}}$ il existe a' tel que $\mathrm{d}(a'/k) = 0$, $l' := \mathrm{cl}_{\omega}(ka') \in \tilde{\mathcal{C}}_0^{\mu}$ et $l' \models \neg\tau(a',\overline{b})$.

Dans un premier temps, on suppose de plus que μ ne prend que des valeurs finies.

On considère $M_0 := \mathrm{cl}_{\mathrm{d}}^{M}(k)$. Alors :

(a) $M_0 \models T'^{\mu}(1,2,3)$ (c'est clair pour (1), et pour (2) cela suit du fait que toute solution $\overline{a}$ d'un $p \in \mathcal{D}$ satisfait $\mathrm{d}(\overline{a}) = 0$. Pour (3), il suffit de montrer : si $L \in \mathcal{E}$ et $K = \mathrm{cl}_{\mathrm{d}}^{L}(K) \leq L$, alors $K \in \mathcal{E}$ aussi. Sinon, on trouverait $q \in S(K)$ admissible et non-modulaire. Comme $q|L$ est modulaire, il y a une réalisation $\overline{c}$ de q dans L, par 3.3.3. Or, $\overline{c} \in \mathrm{cl}_{\mathrm{d}}^{L}(K) = K$, une contradiction.

(b) Soient $L_0 \models T'^{\mu}(1,2,3)$ et $L_0 \leq L \in \tilde{\mathcal{C}}_0^{\mu}$. Alors, $\mathrm{d}(a/L_0) = 1$ pour tout $a \in L \setminus L_0$. (Il suffit de montrer que L_0 n'admet aucune extension primitive L dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mu}$. Or, une extension primitive L serait donnée par un type admissible q. Ce q étant modulaire par l'axiome (3), on aurait $q \not\perp^{a}_{L_0} p$ pour un $p \in \mathcal{D}$, d'où $\mu(p) = \dim_{L_0}(p) < \dim_{L_0}(p) + 1 = \dim_L(p)$, car $\mu(p) < \infty$. Donc, un tel L n'est pas dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mu}$.)

Maintenant, soient $M_0 \preccurlyeq M_1$ une extension élémentaire propre de M_0 et $a \in M_1 \setminus M_0$. Par (b), on a $\mathrm{d}(a/M_0) = 1$, car $M_1 \in \tilde{\mathcal{C}}_0^{\mu}$. Pour $\neg\tau(x,\overline{b}) \in \Phi_{\mathfrak{g}}$, on a donc $M_0 \models \exists x \neg\tau(x,\overline{b})$ par élémentarité de l'extension. Comme $\mathrm{d}(M_0/k) = 0$, cela montre $(*)$ dans le cas particulier où $\mu(p) < \infty$ pour tout $p \in \mathcal{D}$, car $M_0 \models \neg\tau(a',\overline{b})$ entraîne $l' \models \neg\tau(a',\overline{b})$ pour $l' := \mathrm{cl}_{\omega}(ka')$.

Pour μ quelconque et $k \in \mathcal{C}_0^{\mu}$ comme avant, on définit une fonction auxiliaire $\mu' : \mathcal{D} \to \mathbb{N}$ via $\mu'(p) := \dim_k(p)$. Évidemment, comme k est finiment engendrée, μ' ne prend que des valeurs finies. Appliquant le cas précédent, pour toute formule $\neg\tau(x,\overline{b}) \in \Phi_{\mathfrak{g}}$, on trouve une extension parasite $k \leq l' \in \mathcal{C}_0^{\mu'}$ avec $l' \models \exists x \neg\tau(x,\overline{b})$. Or, $\mathcal{C}_0^{\mu'} \subseteq \mathcal{C}_0^{\mu}$ suite à $\mu' \leq \mu$, et donc $l' \in \mathcal{C}_0^{\mu}$, aussi. Cela montre $(*)$ dans le cas général. $\square$

Observons que la contrainte que la fonction μ ait des fibres finies n'est pas nécessaire dans le contexte de fusion abélien. Elle était utilisée dans [Hr92] et

[BH00] pour obtenir la saturation du modèle générique. Or, dans le contexte de fusion abélien on ne peut pas construire de contre-exemple dans le style de [BH00, Section 4]. Pour cette raison, même l'hypothèse que les $\mathcal{L}_i$ soient dénombrables ne serait pas nécessaire dans le contexte de fusion abélien. Par contre, déjà dans le cas d'une fusion de deux espaces vectoriels au-dessus de la théorie d'un ensemble infini sans structure, la contrainte que μ ait des fibres finies doit être imposée, car T_ω est en général multidimensionelle dans ce cas (et la théorie fortement minimale obtenue dans [Hr92] par un collapse n'est pas monobasée).

Lemme 3.4.6. *Si $\mu(p)$ est fini pour tout $p \in \mathcal{D}$, alors dans T^μ, la clôture algébrique est donnée par* $\mathrm{cl_d}$.

Preuve. L'inclusion $\mathrm{acl}_{T^\mu} \subseteq \mathrm{cl_d}$ étant claire, le lemme suit du fait (établi au cours de la preuve de 3.4.3) que pour $M \preccurlyeq N \models T^\mu$ et tout $n \in N \setminus M$ on a $\mathrm{d}(n/M) = 1$. □

Théorème 3.4.7. *Si $\mu(p)$ est fini pour tout $p \in \mathcal{D}$, la théorie T^μ est (complète et) fortement minimale. De plus, elle est monobasée et modèle-complète.*

Preuve. On a déjà vu que T^μ est complète pour μ arbitraire, et nous savons que toute complétion de $T_1 \cup T_2$ est monobasée. Puis, T^μ admet une axiomatisation $\forall\exists$, par 3.4.5. Donc, une fois qu'on sait que T'^μ est fortement minimale, la modèle-complétude de T'^μ suit d'un théorème de Lindström.

Soit M^μ le modèle dénombrable ω-saturé de T^μ. Par les Lemmes 3.4.6 et 3.4.4, il y a un seul 1-type non-réalisé au-dessus de M^μ ce qui montre que T^μ est fortement minimale. □

On remarque que la première preuve de modèle-complétude d'une structure obtenue par la méthode d'amalgamation de Hrushovski (en l'occurrence dans le cas *ab initio* de [Hr93]) est due à Holland [Ho99].

En analogie avec le cas originel de la fusion au-dessus de la théorie de l'ensemble infini sans structure [Hr92], on obtient :

Remarque 3.4.8. *(1) Les expansions $T_i \subseteq T^\mu$ préservent les rangs et les degrés de Morley (mais pas nécessairement les multiplicités).*

(2) Soient $M \models T^\mu$ et $V_i \subseteq M^n$ des ensembles $\mathcal{L}_i$-définissables ($i = 1, 2$) sans paramètres. On suppose que V_i s'intersecte trivialement avec toute hypersurface $\mathcal{L}_0(\emptyset)$-définissable dans M^n, et que $\mathrm{RM}_1(V_1)+\mathrm{RM}_2(V_2) < n$. Alors $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Si Z est $\emptyset$-définissable dans $\mathcal{L}_1$ et dans $\mathcal{L}_2$, alors Z est $\mathcal{L}_0(\emptyset)$-définissable.

(3) Les expansions $T_i \subseteq T^\mu$ sont essentielles. En particulier, il n'y a pas de structure abélienne fortement minimale d'exposant p (pour p premier) qui serait maximale avec ces propriétés.

Preuve. Toute expansion de théories fortements minimales préserve le rang de Morley.

Maintenant, supposons que $\mathrm{DM}_{\mathcal{L}_1}(\varphi_1(\overline{x}, \overline{b})) = 1$. Pour simplifier, on donne la preuve dans le cas où $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$. Quitte à rétrécir $\varphi_1(\overline{x}, \overline{b})$ un peu si nécessaire, et en utilisant une bijection $\mathbb{F}_q$-définissable, on peut supposer que $\models \varphi_1(\overline{a}/\overline{b})$ implique que $\overline{a}$ est $\mathcal{L}_0$-générique au-dessus de $\overline{b}$. De plus, on peut supposer que $\overline{b} \leq M \models T^{\mu}$. Pour $\overline{a} \in M$ générique dans $\varphi_1(\overline{x}, \overline{b})$ (au sens de T^{μ}), on a

$$\mathrm{d}_1(\overline{a}/\overline{b}) \geq \mathrm{d}_1(\overline{a}/\overline{b}) + \mathrm{d}_2(\overline{a}/\overline{b}) - \mathrm{d}_0(\overline{a}/\overline{b}) = \delta(\overline{a}/\overline{b}) \geq \mathrm{d}(\overline{a}/\overline{b}) = \mathrm{d}_1(\overline{a}/\overline{b}),$$

où la dernière égalité est vraie car l'expansion $T_1 \subseteq T^{\mu}$ préserve le rang de Morley et $\mathrm{RM}_{T^{\mu}}(\cdot) = \mathrm{d}(\cdot)$. On a donc égalité partout. En particulier, $\mathrm{d}_2(\overline{a}/\overline{b}) = \mathrm{d}_0(\overline{a}/\overline{b})$ et $\overline{a}$ est $\mathcal{L}_2$-générique au-dessus de $\overline{b}$. De plus, $\mathrm{d}(\overline{a}/\overline{b}) = \delta(\overline{a}/\overline{b})$ entraîne $\overline{a}\overline{b} \leq M$. Comme le type sans quanteurs d'un uplet fort détermine son type, on déduit qu'il y a un seul type $\mathcal{L}$-générique dans $\varphi_1(\overline{x}, \overline{b})$. Cela donne (1).

La première partie de (2) est une conséquence de $\delta(\overline{a}) \geq 0$ pour tout $\overline{a} \in M$. Puis, soit $Z \subseteq M^n$ $\mathcal{L}_i(\emptyset)$-définissable pour $i = 1, 2$. Clairement, Z est $\mathcal{L}_0(\emptyset)$-définissable si pour tout $\mathcal{L}_0$-type complet p_0 au-dessus de $\emptyset$, on a $Z \supseteq p_0$ ou $Z \cap p_0 = \emptyset$. Utilisant des bijections définissables, il suffit de traiter le cas où p_0 est le type $\mathcal{L}_0$-générique dans M^n. Si $Z \cap p_0 \neq \emptyset \neq (M^n \setminus Z) \cap p_0$, on peut supposer que $\mathrm{RM}(Z \cap p_0) =: m < n$. Pour $\overline{a} \in Z \cap p_0$ générique on a alors $m = \mathrm{d}_1(\overline{a}) = \mathrm{d}_2(\overline{a}) = \mathrm{d}(\overline{a}) \leq \mathrm{d}_1(\overline{a}) + \mathrm{d}_2(\overline{a}) - \mathrm{d}_0(\overline{a}) = 2m - n < m$, une contradiction.

Quant à (3), on utilise un argument similaire que dans (1) pour montrer qu'un ensemble $\mathcal{L}_2$-définissable et non-$\mathcal{L}_0$-définissable de RDM minimal ne peut pas être définissable à l'aide d'une $\mathcal{L}_1$-formule dans la théorie T^{μ}. $\square$

Exemple 3.4.9. Soient F_1 et F_2 des corps gauches contenant $F_0 := \mathbb{F}_q$, et soit $T_i := \mathrm{EV}_{F_i}$. On est donc dans le contexte de fusion abélien. Posons $R := F_1 *_{F_0} F_2$, où $*_{F_0}$ dénote le coproduit dans la catégorie des F_0-algèbres non-commutatives (on renvoie à [Co77] pour tout ce qui concerne la théorie des corps gauches). Clairement, tout $M \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ est un R-module. Il est facile de voir que si a est d-générique et $0 \neq r \in R$, alors $r \cdot a$ est d-générique. En utilisant une $\mathbb{F}_0$-base appropriée de R (voir [Co77, p.97]), on montre que si $\mathrm{d}(a/k) = 1$ pour un $k = \mathrm{cl}_{\omega}(k)$, alors $\langle ka \rangle = k \oplus R$ comme R-module, et $\mathrm{d}(a/k \cup \{r \cdot a\}) = 0$ de manière assez explicite. Donc, pour une fusion fortement minimale T^{μ}, R se plonge naturellement dans le corps gauche des quasi-endomorphismes. En particulier, cela montre que R admet un corps des fractions. On sait, par des méthodes algébriques, que R admet même un corps des fractions universel (combiner les théorèmes 4.C et 5.3.2 dans [Co77]). Comme notre construction de T^{μ} est très canonique, il semble très probable que le corps des quasi-endomorphismes de T^{μ} (pour tout μ) coïncide avec le corps des fractions universel de R promis algébriquement.

Finalement, on remarque que pour trouver un corps des fractions de R, on n'a pas besoin du collapse, car la géométrie de déviation du type générique (c'est un type localement modulaire et régulier) est donnée par un corps des fractions de R.

Néanmoins, il y a une différence intéressante entre le contenu purement algébrique de l'exemple précédent et le cadre (modèle-théorique) plus général du contexte de fusion abélien. La construction d'un corps des fractions (universel) pour $K_1 *_{K_0} K_2$ se fait au-dessus d'un corps gauche K_0 arbitraire, tandis que dans le contexte de fusion abélien, l'ω-catégoricité de T_0 semble cruciale pour le collapse. Ce phénomène est illustré dans l'exemple suivant mentionné dans l'introduction de [Hr92].

Exemple 3.4.10. Soit T_0 la théorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, avec deux éléments c, d linéairement indépendants nommés comme constantes, puis

– T_1 la théorie des $\mathbb{Q}[i]$-espaces vectoriels, avec $i \cdot c = d$,

– T_2 la théorie des $\mathbb{Q}(X)$-espaces vectoriels, avec $X \cdot c = d$.

Dans tout $M \models T_1 \cup T_2$, l'ensemble définissable $N := \ker(i - X)$ est un $\mathbb{Q}$-sous-espace propre non-trivial de M, car $c \in N$ et $d \notin N$. Donc $\mathrm{RM}(M) \geq 2$. En particulier, $\mathrm{Th}(M)$ n'est pas fortement minimale.

Dans le contexte de fusion abélien, le collapse le plus "petit", si l'on veut, c'est la théorie T^{μ_0} qui correspond à la fonction μ_0 qui est égale à 0 partout. Un modèle de T^{μ_0}, c'est donc précisément l'enveloppe affine admissible d'un ensemble d-générique et indépendant $B_{\mathfrak{g}}$. De plus, les modèles de T^{μ_0} sont classifiés par leur dimension, donc par la cardinalité de $B_{\mathfrak{g}}$. (Cela est d'ailleurs vrai pour toute fonction $\mu : \mathcal{D} \to \mathbb{N}$.)

Avant de terminer cette section, nous allons illustrer pourquoi une construction beaucoup plus naïve ne peut pas aboutir : on pourrait croire, à première vue, que $M := \langle B_{\mathfrak{g}} \rangle$ serait un bon candidat. Or, l'exemple suivant montre que des structures de cette forme ne sont pas du tout homogènes. De plus, on verra apparaître des réalisations de types admissibles non-modulaires au sein d'un tel M. C'est d'ailleurs exactement cette construction que nous avons utilisée, dans un contexte plus général, pour montrer $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \omega$ dans 3.1.17(2).

Exemple 3.4.11. On reprend l'Exemple 3.4.9. Soit $k = \langle a \rangle$, où $a \models \mathfrak{g}$ est un élément générique. Pour $i = 1, 2$, on choisit $\lambda_i \in F_i \setminus F_0$ et on pose $b := \lambda_1 \cdot_1 a - \lambda_2 \cdot_2 a$. On voit sans peine que $b \models \mathfrak{g}$ et que $a \notin \langle b \rangle = \mathrm{cl}_\omega(b)$. Plus précisément, posant $a' := \lambda_1 \cdot_1 a$, alors $q_b := \mathrm{tp}_\omega(a, a'/b)$ est admissible (et non-modulaire). Si $q_i := q \upharpoonright_{\mathcal{L}_i}$, alors q_1 est le type générique de $\lambda_1 \cdot_1 x = x'$, tandis que q_2 est le type générique de $\lambda_2 \cdot_2 x = x' - b$.

Une fusion homogène (pour les plongements forts) K dans laquelle k est fort contient donc nécessairment une réalisation de la copie q_a de q_b.

3.5 Résultats généraux de collapse

Nous continuons à considérer (T_0, T_1, T_2), un contexte de fusion fortement minimal (voir 3.1.1). Mais nous supprimons l'hypothèse supplémentaire de 3.2.5 sur T_0, à savoir que T_0 est (essentiellement) la théorie d'un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel.

Définition 3.5.1. Soit (T_0, T_1, T_2) un contexte de fusion fortement minimal. Un *collapse pour* (T_0, T_1, T_2) est la donnée d'une classe élémentaire (non-vide) de $\mathcal{L}$-structures $\tilde{\mathcal{C}}_0^c \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_0$ qui satisfait aux propriétés suivantes :

(i) $\tilde{\mathcal{C}}_0^c$ est "clos par sous-fusion", c'est à dire si $K \subseteq L \in \tilde{\mathcal{C}}_0^c$ pour une fusion $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, alors $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0^c$.

(ii) Si $k \leq K \in \tilde{\mathcal{C}}_0^c$, et $k \leq l \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ est une extension primitive, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $l^{(n)}$ ne se k-plonge pas dans K, où $l^{(n)} := \underbrace{l \otimes_k l \ldots l \otimes_k l}_{n \text{ fois}}$.

(iii) $(\tilde{\mathcal{C}}_0^c, \leq)$ a la propriété d'amalgamation (la propriété du plongement commun en découle).

(iv) Si T^c est la $\mathcal{L}$-théorie des fusions de $\tilde{\mathcal{C}}_0^c$ qui sons riches pour la classe $(\mathcal{C}_0^c, \leq)$, alors tout modèle ω-saturé de T^c est riche pour $(\mathcal{C}_0^c, \leq)$. Ici, $\mathcal{C}_0^c$ dénote la classe des fusions finiment engendrées qui sont dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^c$.

Si $\bar{b}$ est un uplet fini de paramètres et $(\mathcal{C}^c, \leq)$ un collapse pour le contexte de fusion $(T_0(\bar{b}), T_1(\bar{b}), T_2(\bar{b}))$, on dira également que $(\mathcal{C}^c, \leq)$ est un collapse pour (T_0, T_1, T_2).

Lemme 3.5.2. *Si $\tilde{\mathcal{C}}_0^c$ est un collapse pour (T_0, T_1, T_2) au sens de 3.5.1, alors la $\mathcal{L}$-théorie T^c des riches par rapport à $(\mathcal{C}_0^c, \leq)$ est complète et fortement minimale, avec "l'élimination des quanteurs pour les forts" (le type d'un uplet fort est déterminé par son $\mathcal{L}$-type sans quanteurs). Pour $A \subseteq M \models T^c$, on a* $\mathrm{acl}_{T^c}(A) = \mathrm{cl}_{\mathrm{d}}(A)$. *En particulier,* d *donne la dimension au sens de la théorie fortement minimale T^c.*

Preuve. La complétude et l'élimination des quanteurs pour les forts sont immédiates, compte tenu du fait que tout modèle ω-saturé de T^c est riche par (iv). Par la décomposition d'une extension parasite en primitives et (ii), on voit que $\mathrm{cl}_{\mathrm{d}}(A) \subseteq \mathrm{acl}_{T^c}(A)$ pour tout $A \subseteq M \models T^c$. Puis, par l'élimination des quanteurs pour les forts, pour deux modèles $M \subseteq N$ de T^c on a $M \preccurlyeq N$ ssi $M \leq N$. Donc, au-dessus d'un modèle ω-saturé M de T^c il n'y a qu'un seul 1-type non-réalisé (a fortiori, c'est le cas au-dessus d'un modèle quelconque). Cela termine la preuve. $\square$

Un collapse du contexte de fusion (T_0, T_1, T_2) est donc une façon particulière d'obtenir une expansion fortement minimale commune T de T_1 et T_2 respectant le réduit commun T_0. Le résultat suivant justifie cette précision du terme *collapse*, en montrant qu'il a de bonnes propriétés de transfert.

Proposition 3.5.3. *Soit (T_0, T_1, T_2) un contexte de fusion fortement minimal, et soit D_0' un ensemble fortement minimal ($\emptyset$-)interprétable dans T_0. Pour $i = 0, 1, 2$, soit T_i' la morleyisée de la théorie de D_0' avec toute la structure induite par T_i. On suppose :*

– *T_0' est modulaire,*
– *T_i' est fortement minimale pour $i = 1, 2$,*
– *(T_0', T_1', T_2') a un bon contrôle,*
– *il existe un collapse pour le contexte de fusion (T_0', T_1', T_2').*

Alors il existe un collapse pour (T_0, T_1, T_2) aussi. Plus précisément, si $\tilde{\mathcal{C}}_0'^c$ est un collapse pour (T_0', T_1', T_2'), avec T'^c la théorie des riches dans $\tilde{\mathcal{C}}_0'^c$, alors

$$\tilde{\mathcal{C}}_0^c := \{K \in \tilde{\mathcal{C}}_0 \mid D_0'(K) \in \tilde{\mathcal{C}}_0'^c\}$$

donne un collapse pour (T_0, T_1, T_2)*, et* $K \models T^c$ *ssi* $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ *et* $D'_0(K) \models T'^c$*.*

Preuve. Soit $\tilde{\mathcal{C}}_0'^c$ un collapse pour (T'_0, T'_1, T'_2). Considérons donc la classe $\tilde{\mathcal{C}}_0^c := \{K \in \tilde{\mathcal{C}}_0 \,|\, D'_0(K) \in \tilde{\mathcal{C}}_0'^c\}$. On montre que cette classe donne un collapse pour (T_0, T_1, T_2).

L'ensemble fortement minimal D'_0 étant $\emptyset$-interprétable dans T_0 et modulaire, le générique de D'_0 et le 1-type générique de T_0 sont inter-$\mathcal{L}_0$-algébrique.

Quelques mots sur la notation : si $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ est une fusion, on dénote par K' l'ensemble $D'_0(K)$, avec toute la structure induite par $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. Plus généralement, si $A = \mathrm{acl}_0(A) \subseteq K$, on pose $A' := K' \cap \mathrm{acl}_0^{eq}(A)$ (calculé dans K^{eq}). Puis, soit $\mathcal{L}'_i$ un langage dans lequel T'_i élimine les quanteurs. L'amalgame libre dans $\tilde{\mathcal{C}}'_0$ est notée $\otimes'$, et $\perp'$ désigne l'orthogonalité dans T'_ω, $\perp$ celle dans T_ω. Finalement, soient $\delta' = \mathrm{d}'_1 + \mathrm{d}'_2 - \mathrm{d}'_0$ et d' la prédimension ainsi que la dimension au sens du contexte de fusion (T'_0, T'_1, T'_2).

Comme $\mathrm{d}_i(A'/B') = \mathrm{d}_i(A/B)$, une extension A/B est première ssi A'/B' l'est. Puis, pour deux fusions $K \leq L \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, on a : L/K est primitive / parasite / générique ssi L'/K' l'est.

Vérifions que $\tilde{\mathcal{C}}_0^c$ ait les propriétés (i)-(iv) de 3.5.1. Pour (i), c'est évident.

Quant à (ii), considérons $k \leq K \in \tilde{\mathcal{C}}_0^c$ et une extension primitive $k \leq l$. Si $l^{(n)}$ se k-plonge dans K, alors $l'^{(n)} = (l^{(n)})'$ se k'-plonge dans K'. Comme $\tilde{\mathcal{C}}_0'^c$ satisfait à (ii), il y a donc une borne pour de tels entiers n et $\tilde{\mathcal{C}}_0^c$ vérifie (ii) aussi.

Pour montrer (iii), par un argument de maximalité et le Lemme de décomposition, il suffit de considérer le cas de $K \leq L, M \in \tilde{\mathcal{C}}_0^c$ avec L/K primitive ou générique, pareil pour M/K. Si L/K est générique, L'/K' aussi, et on voit aisément que $L' \otimes'_{K'} M' \in \tilde{\mathcal{C}}_0'^c$. Or, $(L \otimes_K M)' = L' \otimes'_{K'} M'$, d'où $L \otimes_K M \in \tilde{\mathcal{C}}_0^c$ par définition. Si L/K et M/K sont deux extensions primitives, il y a deux cas : Si $\mathrm{tp}_\omega(L/K) \not\perp_K^a$, alors $L \simeq_K M$ (via un K-isomorphisme σ), et on peut donc amalgamer *économiquement*, c'est à dire en utilisiant un tel σ. Sinon, $\mathrm{tp}_\omega(L/K) \perp_K^a \mathrm{tp}_\omega(M/K)$, et donc $\mathrm{tp}_\omega(L'/K') \perp_K^a \mathrm{tp}_\omega(M'/K')$ aussi. A fortiori, $\mathrm{tp}_{\omega'}(L'/K') \perp'^a_{K'} \mathrm{tp}_{\omega'}(M'/K')$. Comme $\tilde{\mathcal{C}}_0'^c$ est amalgamable, $L' \otimes'_{K'} M' \in \tilde{\mathcal{C}}_0'^c$, et on conclut comme dans le cas d'une extension générique.

Pour terminer, nous montrons que les modèles ω-saturés de T^c — définie comme dans la proposition — sont riches par rapport à la classe $(\mathcal{C}_0^c, \leq)$. Soit $K^c \models T^c$ ω-saturé, $K' \leq K^* \models T_\omega$. La saturation passe aux interprétations, et alors $(K^c)' \models T'^c$ est ω-saturé, aussi (donc riche par rapport à $(\mathcal{C}_0'^c, \leq)$ par hypothèse).

Considérons $k \leq K^c$, $k \leq l \in \mathcal{C}_0^c$. Comme $(K^c)'$ est riche, on peut trouver une k'-copie l'_1 de l' dans $(K^c)'$, avec $l'_1 \leq (K^c)'$. Posons $l_1 := \mathrm{acl}_0(l'_1) \cap K^c$. Il suffit de vérifier les cas où l/k est générique ou primitive. Dans le cas générique, l_1/k est générique aussi et on peut donc k-plonger l dans K^c. Dans le cas primitif, $\mathrm{tp}_\omega(l_1/k) \not\perp_k^a \mathrm{tp}_\omega(l/k)$, et alors $l_1 \simeq_k l$. □

Depuis le début du Chapitre 2 et jusqu'à maintenant — le collapse dans le contexte de fusion abélien (Théorème 3.4.7) inclus — l'hypothèse que les $\mathcal{L}_i$ soient dénombrables simplifiait l'exposition, mais était tout à fait inessentielle (modulo quelques adaptations évidentes : par exemple, remplacer "ω-stable" par "totalement transcendente" dans 3.1.9), à l'exception du Théorème 3.2.13, qui n'a pas d'analogue si les $\mathcal{L}_i$ ne sont pas dénombrables. Ce n'est plus du tout le cas pour les résultats suivants. La preuve du collapse dans le contexte originel de fusion [Hr92] et la preuve du résultat 3.5.6 utilisent de manière cruciale que les langages sont dénombrables : d'abord, pour trouver un bon *codage* des ensembles $\mathcal{L}_i$-définissables (pour fabriquer des *codes*, une version affinée de nos familles admissibles dans 3.2.13), puis une seconde fois en choisissant une fonction μ à fibres finies.

Donc, *d'ici jusqu'à la fin de la Section 3.5, la condition que les $\mathcal{L}_i$ soient dénombrables devient indispensable.*

Corollaire 3.5.4. *Soit (T_0, T_1, T_2) un contexte de fusion fortement minimal. Supposons que T_1 et T_2 ont la DMP, et que T_0 est triviale. Alors il existe un collapse pour (T_0, T_1, T_2).*

Preuve. C'est le résultat principal de [Hr92] que l'on peut collapser dans un contexte de fusion de la forme (T_0', T_1', T_2'), où T_0' est la théorie d'un ensemble infini sans structure, et T_1', T_2' sont fortement minimales et ont la DMP. D'ailleurs, le bon contrôle est immédiat dans ce cas. Maintenant, en utilisant le Lemme 3.2.4, on peut $\mathcal{L}_0$-interpréter un ensemble fortement minimal D_0', tel que le contexte (T_0', T_1', T_2') soit exactement de la forme traitée par Hrushovski. Ici, T_i' dénote la théorie de la structure induite sur D_0' par $\mathcal{L}_i$. Notons que T_i' hérite la DMP de la théorie T_i (c'est facile, voir [Hr92]).

Il suffit d'appliquer la Proposition 3.5.3 pour obtenir un collapse dans le contexte de fusion (T_0, T_1, T_2). □

Corollaire 3.5.5. *Soit (T_0, T_1, T_2) un contexte de fusion fortement minimal. On suppose que T_1 et T_2 sont monobasées. Si T_0 est triviale, on suppose en outre que T_1 et T_2 ont la DMP. Alors il existe un collapse pour (T_0, T_1, T_2).*

Preuve. Si T_0 est triviale, c'est un cas particulier du Corollaire 3.5.4.

Si T_0 est projective, on utilise le Lemme 3.2.4 et puis la Proposition 3.5.3 comme dans la preuve de 3.5.4. Cette fois, le nouveau contexte de fusion fortement minimal (T_0', T_1', T_2') que l'on obtient est un contexte de fusion abélien, car T_1' et T_2' sont des expansions monobasées de T_0' (qui est essentiellement $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$). Dans le contexte de fusion abélien, un collapse existe d'après le Théorème 3.4.7, et donc 3.5.3 s'applique. Évidemment, l'utilisation de 3.2.4 pourrait nous obliger à ajouter des paramètres aux langages $\mathcal{L}_i$ avant le collapse. □

Fin 2005, Baudisch, Martin-Pizarro et Ziegler ont montré le collapse au-dessus de $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$ en toute généralité. En effet :

Fait 3.5.6 ([BMZ05a])**.** *Soit (T_0, T_1, T_2) un contexte de fusion fortement minimal avec $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$ pour un corps fini. On suppose que T_1 et T_2 ont la DMP. Alors il existe un collapse pour (T_0, T_1, T_2).* □

En inspectant leur preuve, on voit qu'elle s'adapte au cas où T_0 est une expansion inessentielle de $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$. Donc, en utilisant le Lemme 3.2.4 et puis la Proposition 3.5.3 comme dans la preuve du Corollaire 3.5.5, nous obtenons :

Théorème 3.5.7. *Soit* (T_0, T_1, T_2) *un contexte de fusion fortement minimal. Si* T_1 *et* T_2 *ont la DMP, il existe un collapse pour* (T_0, T_1, T_2). □

Remarque. *Dans 3.5.7 (ainsi que dans 3.5.4 et 3.5.5), on n'a pas vraiment besoin de la DMP pour* T_1 *et* T_2. *Il suffit que les théories auxiliaires* T_1' *et* T_2' *qui émergent dans la preuve aient la DMP.*

Chapitre 4

Variations sur la fusion

Dans ce chapitre, nous présentons, de manière concise, deux variantes de la fusion.

Chapuis, Hrushovski, Koiran et Poizat construisent dans [CHKP02] une expansion de la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique donnée, obtenue en ajoutant un prédicat binaire pour une *courbe générique* plane. Nous montrons comment généraliser leur construction aux théories supersimples de rang SU égal à 1.

La deuxième variante concerne les *corps bicolores* (noirs et rouges) introduits par Poizat dans [Po99] et [Po01]. Nous considérons des paires de théories $T_0 \subseteq T_1$, avec T_0 fortement minimale, ω-catégorique et modulaire, et T_1 supersimple de rang SU égal à 1. Nous exigeons de l'ensemble des points colorés qu'il forme une sous-structure élémentaire (au sens de T_0) du modèle ambiant.

Nous utilisons les mêmes notations que dans la fusion libre, pour souligner les similarités. Notons que l'on pourrait donner un cadre axiomatique qui incorpore la fusion libre, la courbe générique et les structures bicolores. Mais nous ne le ferons pas par souci de lisibilité. La fusion étant bien plus compliquée d'un point de vue technique, nous nous permettons d'être bref dans l'exposition de ces deux variations.

4.1 Courbe générique

Soit T_1 une $\mathcal{L}_1$-théorie complète et C un nouveau symbole de relation binaire. Soit $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \{C\}$. On s'intéresse à des $\mathcal{L}$-structures (M, C^M), où $M \models T_1$. Soit $T_1 = ACF_p$ la théorie d'un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$, et soient $K \models ACF_p$, $d \geq 1$ et $(a_{i,j})$ une suite d'éléments algébriquement indépendants dans K, où $0 \leq i, j$ et $i + j \leq d$. La courbe $C_d \subseteq K^2$ donnée par l'équation $\sum_{i,j} a_{i,j} X^i Y^j = 0$ est une courbe générique de degré d. Soit T_d la $\mathcal{L}$-théorie de (K, C_d^K). Cette théorie s'interprète dans le type de l'uplet $a_{i,j}$ et ne dépend donc pas du choix des $a_{i,j}$. Dans [CHKP02], il est montré :

(1) La suite $(T_d)_{d\geq 1}$ tend vers une limite T_ω dans l'espace des $\mathcal{L}$-théories.

(2) Cette limite T_ω est ω-stable de rang de Morley ω.

(3) Si $(K, C) \models T_\omega$ et $(a', b') \in C$, alors posant $C' := C \setminus \{(a', b')\}$, on a $(K, C') \models T_\omega$. De même, il existe $(a'', b'') \in K^2 \setminus C$ tel que pour $C'' := C \cup \{(a'', b'')\}$ on a $(K, C'') \models T_\omega$.

La construction de T_ω se fait par une amalgamation à la Fraïssé-Hrushovski, sans collapse. La complétude et l'ω-stabilité ainsi que (3) s'obtiennent alors facilement. La preuve de (1) est plus difficile. Les propriétés (1) et (3) ont de nombreuses conséquences de non-définissablité. Citons-en deux :

(I) Pour $m \geq 2$, soit R_m un nouveau prédicat m-aire. Alors, il n'existe pas d'énoncé $\varphi(R_m)$ dans le langage des corps augmenté par R_m tel que pour tout ensemble définissable $D \subseteq K^m$ on ait : D est Zariski-clos si et seulement si $K \models \varphi(D)$.

(II) Soit R_m comme dans (I). Alors il n'existe pas d'énoncé $\varphi(R_m)$ tel que pour tout ensemble Zariski-clos $D \subseteq K^m$ on ait : D est irréductible si et seulement si $K \models \varphi(D)$.

4.1.1 Construction

Dans cette sous-section, nous généralisons la construction de la théorie d'une courbe générique. Pour cela, nous fixons le cadre suivant :

Contexte 4.1.1. T_1 est une $\mathcal{L}_1$-théorie complète supersimple de rang SU 1. Pour simplifier l'exposition, on suppose aussi que T_1 élimine les quanteurs.

Soit $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \{C\}$, où C est un nouveau symbole de relation binaire. Comme avant, acl_1 dénote la clôture algébrique au sens de T_1, et $\mathrm{d}_1(\overline{a}/B) := \mathrm{SU}_{T_1}(\overline{a}/B)$.

Définition 4.1.2. (1) Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ la classe des $\mathcal{L}$-structures (M, C^M) avec $M = \mathrm{acl}_1(M)$, et $\mathcal{C} := \{M \in \tilde{\mathcal{C}} \mid \mathrm{d}_1(M) < \infty\}$.

(2) Pour $A \subseteq_\omega M \in \tilde{\mathcal{C}}$ et $B \subseteq M$ arbitraire on pose $\delta(A) := \mathrm{d}_1(A) - |C^A|$ (la *prédimension* de A) et $\delta(A/B) := \mathrm{d}_1(A/B) - |C^{AB} \setminus C^B|$.

(3) $\tilde{\mathcal{C}}_0 := \{M \in \tilde{\mathcal{C}} \mid \delta(A) \geq 0 \, \forall A \subseteq_\omega M\}$, et $\mathcal{C}_0 := \tilde{\mathcal{C}}_0 \cap \mathcal{C}$.

(4) Pour $A \subseteq_\omega M \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, on pose $\mathrm{d}_M(A) := \min\{\delta(\tilde{A}) \mid A \subseteq \tilde{A} \subseteq_\omega M\}$. Si $B \subseteq M$, alors $\mathrm{d}_M(A/B) := \min\{\mathrm{d}_M(AB_0) - \mathrm{d}_M(B_0) \mid B_0 \subseteq_\omega B\}$.

(5) Pour $B \subseteq A \subseteq M$, on définit $B \leq A$ (B est *autosuffisant* ou *fort* dans A) si et seulement si $\delta(\overline{a}/B) \geq 0$ pour tout uplet fini $\overline{a} \in A$.

La classe $\tilde{\mathcal{C}}_0$ est élémentaire. Pour être en analogie complète avec la fusion libre, nous pourrions écrire $\langle\cdot\rangle$ au lieu de $\mathrm{acl}_1(\cdot)$, mais nous gardons la notation acl_1. Si $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et $B \subseteq K$, par conséquent, on dit que B *contrôle* K si $\mathrm{acl}_1(B) = K$ et $B \leq K$. On a donc $B \leq \mathrm{acl}_1(B)$ si et seulement si $C^{\mathrm{acl}_1(B)} = C^B$.

Le lemme suivant s'obtient comme 2.1.1 dans le cas de la fusion libre.

Lemme 4.1.3. *Tous les ensembles et uplets considérés sont contenus dans $K \in \tilde{\mathcal{C}}$. Alors on a :*

(1) *(sous-modularité) Soit $A \subseteq B$. Alors, $\delta(\overline{c}/(A\overline{c}) \cap B) \geq \delta(\overline{c}/B)$. En particulier, si $B \leq C$ et $D \subseteq C$, alors $D \cap B \leq D$.*

(2) *(transitivité) Si $A \leq B$ et $B \leq C$, alors $A \leq C$.*

(3) *(continuité) Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système filtré de sous-ensembles de C tel que $A_i \leq C$ pour tout i, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \leq C$.*

(4) *Si $A_1, A_2 \leq B$, alors $A_1 \cap A_2 \leq B$.*

Si on suppose en outre que $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, alors :

(5) *Pour tout $A \subseteq K$ il existe un ensemble $\mathrm{cl}_0^K(A)$ qui est minimal parmi les ensembles A' tels que $A' \supseteq A$ et $A' \leq K$. L'ensemble $\mathrm{cl}_0^K(A) \setminus A$ est fini. De plus, on a $\mathrm{d}_K(A) = \delta(\mathrm{cl}_0^K(A))$.*

(6) *Soient $A \subseteq B \subseteq C$ finis. Alors, on a $\mathrm{d}_K(C/A) = \mathrm{d}_K(C/B) + \mathrm{d}_K(B/A)$, $\mathrm{d}_K(B/A) \leq \mathrm{d}_K(C/A)$ et $\mathrm{d}_K(C/A) \geq \mathrm{d}_K(C/B)$.*

(7) *$\mathrm{d}_K(a/B) \in \{0,1\}$ pour tout singleton a, et l'opérateur de* clôture géométrique $\mathrm{cl}_{\mathrm{d}}^K(B) := \{a \in K \mid \mathrm{d}_K(a/B) = 0\}$ *définit une prégéométrie.* □

Pour $A \subseteq K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, *la clôture autosuffisante* est définie par $\mathrm{cl}_\omega^K(A) := \mathrm{acl}_1(\mathrm{cl}_0^K(A))$, et est donc égale au plus petit sous-ensemble algébriquement clos (au sens de T_1) et autosuffisant de K qui contient A. L'analogue du Lemme 2.1.5 devient :

Lemme 4.1.4. *Soient $K \in \tilde{\mathcal{C}}$ et $\pi_1(\overline{x})$ un $\mathcal{L}_1$-type partiel consistant sur K, $\pi_C(\overline{x})$ un $\{C\}$-type sur K (partiel et consistant), tels que les restrictions de $\pi_1(\overline{x})$ et de $\pi_C(\overline{x})$ à $\mathcal{L}_=(K)$ soient complètes et coïncident. Alors il existe $K \subseteq L \in \tilde{\mathcal{C}}$ et $\overline{a} \in L$ tels que $L \models \pi_1(\overline{a}) \cup \pi_C(\overline{a})$ et L soit contrôlé par $K\overline{a}$.*

Preuve. On réalise π_1 par un uplet $\overline{a}$, et on met dans $C^{K\overline{a}}$ les paires formées d'éléments de $K\overline{a}$ qui sont nécessaires pour satisfaire à π_C. Il suffit de poser $L := \mathrm{acl}_1(K\overline{a})$ et $C^L := C^{K\overline{a}}$. □

Si $K \subseteq L, M$ sont dans $\tilde{\mathcal{C}}$, alors $N \in \tilde{\mathcal{C}}$ contenant L et M est un *amalgame libre* de L et M au-dessus de K, si $L \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^1_K M$ et N est contrôlé par LM (c'est à dire $N = \mathrm{acl}_1(LM)$ et $C^N = C^L \cup C^M$). En utilisant le Lemme 4.1.4, on montre que les amalgames libres existent. Si $K \leq L, M$ sont dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ et $N = L \otimes_K M$, alors $N \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et L, M sont autosuffisants dans N (cela se montre comme le Lemme 2.1.10). Comme il y a une seule $\mathcal{L}$-expansion de $\mathrm{acl}_1(\emptyset)$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ ($C^{\mathrm{acl}_1(\emptyset)} = \emptyset$), on obtient donc

Lemme 4.1.5. *La classe $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$ est connexe (c'est à dire elle a la propriété du plongement commun) et a la propriété d'amalgamation (AP).* □

On définit de manière usuelle les structures *riches* dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ (pour la classe $(\mathcal{C}_0, \leq)$), et on voit comme dans 2.1.14 que les structures riches existent en cardinalité $\leq 2^{|\mathcal{L}_1| + \aleph_0}$. Comme $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$ est connexe, deux structures riches sont $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalentes. Soit T_ω la $\mathcal{L}$-théorie des structures riches. C'est donc une théorie complète, et on voit sans problème que $T_\omega \restriction_{\mathcal{L}_1} = T_1$.

Les notions d'extension *générique / parasite / primitive* sont définies de manière analogue à la fusion libre (voir 2.2.1). Ainsi, par exemple, une extension $K \leq L$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ est générique s'il existe un singleton $a \in L \setminus K$ avec $\mathrm{d}(a/K) = 1$ et $L = \mathrm{acl}_1(Ka)$. Dans ce cas, on a donc $C^L = C^K$. On montre un *Lemme de décomposition* analogue à 2.2.11. Ici, dans le cas de la courbe générique, l'analogue d'une extension première (de sous-ensembles acl_0-clos d'une fusion $B \leq A$) est défini de la façon suivante : pour $B \subseteq A \subseteq K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ on exige que $B \leq A$, $A \setminus B$ est fini (son cardinal est la *longueur* de l'extension première), $\delta(A/B) = 0$ et $\delta(A'/B) > 0$ pour tout $B \subsetneq A' \subsetneq A$. Si $A \setminus B$ contient un seul élément a, nous demandons de plus que $a \notin \mathrm{acl}_1(B)$. Une extension première A/B de longueur 1 est donc de la forme $A = Ba$ avec $\mathrm{d}_1(a/B) = 1$ et $|C^A \setminus C^B{=}1$.

Notons qu'il existe des extensions premières de longueur n pour tout n au-dessus de tout $B \subsetneq K^* \in \tilde{\mathcal{C}}_0$. Pour cela, soit $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ avec $\mathrm{d}_1(\overline{a}/B) = n$. Alors, il suffit de considérer l'ensemble $A = B\overline{a}$ avec sa $\mathcal{L}_1$-structure sous-jacente et de définir $C^A := C^B \cup \{(a_0, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{n-2}, a_{n-1}), (a_{n-1}, a_0)\}$ (un n-cycle formé par l'uplet $\overline{a}$). On peut en fait montrer que toute extension première de longueur ≥ 2 est de cette forme.

4.1.2 Axiomatisation et simplicité

Dans cette sous-section, nous continuons l'étude de la courbe générique dans le Contexte 4.1.1. Nous donnons une axiomatisation de T_ω et montrons ensuite que T_ω est une théorie supersimple, par une application standard du théorème de Kim-Pillay.

Soit $B \leq B\overline{a}$ une extension première et $\varphi_1(\overline{x}, \overline{b})$ une $\mathcal{L}_1$-formule rang-complète par rapport à $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}_1}(\overline{a}/B)$ (voir la Définition 2.3.1). Puis, soit $\varphi_C(\overline{x}, \overline{z})$ la formule qui décrit le diagramme sans quanteurs de $\overline{a}, \overline{b}$ dans le langage $\mathcal{L}_C := \{C\}$. Posons

$$\psi(\overline{x}, \overline{z}) := \varphi_1(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \varphi_C(\overline{x}, \overline{z}). \tag{4.1}$$

On rappelle que pour tout type $p \in S_{T_1}(B)$ les formules rang-complètes par rapport à p sont cofinales dans p (Lemme 2.3.2). Donc, les formules de la forme $\psi(\overline{x}, \overline{b})$, pour $\psi(\overline{x}, \overline{z})$ comme dans (4.1), sont cofinales dans $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}/B)$.

On considère la $\mathcal{L}$-théorie T'_ω donnée par :

$T'_\omega(1)$: $\mathrm{Th}(\tilde{\mathcal{C}}_0)$

$T'_\omega(2)$: T_1

$T'_\omega(3)$: Soit $\psi(\overline{x}, \overline{z}) = \varphi_1(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \varphi_C(\overline{x}, \overline{z})$ comme dans (4.1) et définissons $\theta_\psi(\overline{z}) := \exists \overline{x} \varphi_1(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \exists \overline{x} \varphi_C(\overline{x}, \overline{z})$. Alors on met l'axiome

$$\forall \overline{z} \exists \overline{x} [\theta_\psi(\overline{z}) \rightarrow \psi(\overline{x}, \overline{z})].$$

Pour simplifier l'exposition, *on suppose dans la suite que $\mathcal{L}_1$ est dénombrable.*

Proposition 4.1.6. *Les modèles $\aleph_\epsilon$-saturés de T_ω sont exactement les structures riches dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$. En particulier, les théories T'_ω et T_ω coïncident.*

Preuve. La preuve suit à peu près les mêmes étapes que celle du Théorème 2.3.14 combinée avec la Remarque 2.3.15. Nous verrons cependant que dans le cas de la courbe générique, on peut toujours approximer les extensions génériques par des extensions primitives.

Premièrement, on montre qu'une structure riche est modèle de T'_ω. C'est clair pour $T'_\omega(1)$ et facile pour $T'_\omega(2)$. Quant à $T'_\omega(3)$, il suffit d'utiliser le Lemme 4.1.4. En particulier, cela montre que T'_ω est consistante.

Ensuite, montrons que tout modèle $\aleph_1$-saturé de T'_ω est riche pour $(\mathcal{C}_0, \leq)$. Soit donc $k \leq K$, où $K \models T'_\omega$ est $\aleph_1$-saturé, et soit $k \leq l$ une extension dans $\mathcal{C}_0$. Par le Lemme de décomposition, on peut supposer que l/k est primitive ou générique. Soit d'abord l/k primitive, et supposons que l est contrôlé par $\overline{a}$ au-dessus de k. Comme $\delta(\overline{a}/k) = 0$, il suffit de trouver une réalisation $\overline{a}'$ de $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}/k)$ dans K, car $\overline{a} \mapsto \overline{a}'$ s'étend alors automatiquement en un k-plongement fort de l dans K. Les formules qui apparaissent dans $T'_\omega(3)$ sont cofinales dans $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}/k)$, et on peut donc réaliser ce type dans K, par saturation.

Soit $l = \mathrm{acl}_1(ka)$ une extension générique de k et $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ une suite de Morley dans $p_1 := \mathrm{tp}_1(a/k)$ (ou toute autre suite avec $\mathrm{d}_1(\overline{a}/k) = n$ et $\mathrm{tp}_1(a_0/k) = p_1$). La construction d'un n-cycle déjà mentionnée à la fin de la Sous-section 4.1.1 permet de trouver une extension première $k \leq k\overline{a}$ de longueur n. Les extensions de la forme $l_n := \mathrm{acl}_1(k\overline{a})$ donnent une approximation de l'extension générique l/k par des extensions primitives (car si b_n est l'élément dans l_n correspondant à $a \in l$, alors $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\mathrm{acl}_1(kb_n)/k) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(l/k)$ et $kb_n \leq_n K$, où $B \leq_n A$ ssi $\delta(\overline{a}/B) \geq 0$ pour tout uplet $\overline{a} \in A$ de longueur au plus n). Dans un modèle $\aleph_1$-saturé, les extensions génériques se traitent donc aussi.

Finalement, ce que nous avons montré nous donne déjà le Corollaire suivant, à savoir que $\mathrm{acl}_{T_\omega} = \mathrm{cl}_\omega$. A posteriori, on voit donc — comme dans la fusion libre — que les structures riches dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ sont exactement les modèles $\aleph_\epsilon$-saturés de T_ω. □

Corollaire 4.1.7.
1. *La clôture algébrique dans T_ω est donnée par la clôture autosuffisante cl_ω.*
2. *Soit $A_i \subseteq K_i \models T_\omega$, pour $i = 1, 2$. Alors on a $\mathrm{tp}_\omega(A_1) = \mathrm{tp}_\omega(A_2)$ ssi $\mathrm{cl}_0^{K_1}(A_1) \simeq_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_0^{K_2}(A_2)$ ssi $\mathrm{cl}_\omega^{K_1}(A_1) \simeq_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\omega^{K_2}(A_2)$.*

Lemme 4.1.8. *Soient $(K, C) \models T_\omega$ et $(a', b') \in C$. Alors, posant $C' := C \setminus \{(a', b')\}$, on a $(K, C') \models T_\omega$.*

Preuve. Cela se fait exactement comme dans [CHKP02]. □

La définition suivante est similaire à celle dans la fusion libre (voir la Remarque 2.4.2 et la définition juste avant).

Définition 4.1.9. Soient $A, B, C \subseteq K \models T_\omega$. On pose $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^*_B C$ si et seulement si

(i) $\mathrm{cl}_\omega(AB) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^1_{\mathrm{cl}_\omega(B)} \mathrm{cl}_\omega(BC)$ et

(ii) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{d}}_{B} C$
sont satisfaits.

Si on suppose (i), la condition (ii) est équivalente à $\mathrm{cl}_\omega(AB)\,\mathrm{cl}_\omega(BC) \leq K$. On pourrait d'ailleurs utiliser cl_0 au lieu de cl_ω dans la définition de $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}$. Si $B \subseteq A, C$, on remarque que $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{B} C$ si et seulement si $\mathrm{cl}_\omega(AC)$ est un amalgame libre de $\mathrm{cl}_\omega(A)$ et $\mathrm{cl}_\omega(C)$ au-dessus de $\mathrm{cl}_\omega(B)$.

Lemme 4.1.10. *Soient $K \leq A_0, A_1, A_2$ des structures dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$, avec $K \models T_1$. Supposons donnés $A_{\{0,1\}}, A_{\{0,2\}}$ et $A_{\{1,2\}}$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ ainsi que des K-plongements forts $\iota_k^w : A_k \hookrightarrow A_w$ dès que $k \in w$, tels que $A_{\{i,j\}}$ soit un amalgame libre des images de A_i et A_j sous les plongements en question.*

Alors il existe $K \leq A \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et des K-plongements forts $\iota_w : A_w \hookrightarrow A$ satisfaisant

(1) $\iota_w \circ \iota_k^w = \iota_{w'} \circ \iota_k^{w'}$ si $k \in w \cap w'$ (ce plongement est noté ι_k),

(2) $\iota_0(A_0), \iota_1(A_1), \iota_2(A_2)$ est une suite $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}$-indépendante au-dessus de K.

Preuve. Notons que pour $i \neq j$ on a $A_{\{i,j\}} = \mathrm{acl}_1(A_iA_j) = \mathrm{cl}_\omega(A_iA_j)$. Par le théorème d'indépendance dans T_1, on trouve donc des $\mathcal{L}_1$-plongements $\iota'_w : A_w \hookrightarrow M' \models T_1$ (pour un $M' \models T_1$ suffisamment saturé) satisfaisant la condition (1) ainsi que (posant $\iota'_k := \iota'_w \circ \iota_k^w$)

(2′) $\iota'_0(A_0), \iota'_1(A_1), \iota'_2(A_2)$ est une suite $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{1}$-indépendante au-dessus de K.

Maintenant, posons $A'_i := \iota'_i(A_i) \subseteq M'$ et $A'_w := \iota'_w(A_w)$, et considérons $A' := \mathrm{acl}_1(A'_0A'_1A'_2) = \mathrm{acl}_1(\bigcup_w A'_w)$. On définit une $\mathcal{L}$-expansion A de A' comme suit (par transport de structure). Pour $a', b' \in A'$, on met (a', b') dans C^A si et seulement s'il existe w et $(a, b) \in C^{A_w}$ tels que $\iota'_w(a) = a'$ et $\iota'_w(b) = b'$. Par la propriété de compatibilité (1) pour les plongements ι'_w, les applications ι'_i ainsi que ι'_w sont des $\mathcal{L}$-plongements (on les notera ι_i et ι_w, respectivement). On vérifie sans problème que A est (par exemple) un amalgame libre de $\iota_0(A_0)$ et $\iota_{\{1,2\}}(A_{\{1,2\}})$ au-dessus de K, d'où l'on déduit (2). □

Théorème 4.1.11. *La théorie T_ω est supersimple de rang* SU *au plus ω, et la relation de non-déviation dans T_ω est donnée par $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}$.*

Si T_1 est fortement minimale, alors T_ω est ω-stable de rang de Morley $\leq \omega$.

Preuve. Comme dans la preuve du Théorème 2.4.10, on utilise le théorème de Kim-Pillay 1.1.3 caractérisant l'indépendance dans une théorie simple. On doit donc montrer que $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}$ est une notion d'indépendance satisfaisant aux propriétés (i)–(viii) données dans la Définition 1.1.2.

Comme dans le cas de la fusion libre, (i)–(vii) sont faciles. Soient donc $K \models T_\omega$ et $K \subseteq A_1, A_2$ avec $A_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{K} A_2$, et pour $i = 1, 2$, soient $\overline{a}_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{K} A_i$ avec $\mathrm{tp}(\overline{a}_1/K) = \mathrm{tp}(\overline{a}_2/K)$. Nous travaillons dans $K \preccurlyeq K^*$ très saturé.

Il faut trouver $\overline{a}$ avec $\mathrm{tp}(\overline{a}/A_i) = \mathrm{tp}(\overline{a}_i/A_i)$ et $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{*}_{K} A_1A_2$. On peut supposer que A_1, A_2 et les $\overline{a}_i$ sont algébriquement clos et contiennent K. Soit $\overline{a}_0 \models \mathrm{tp}(\overline{a}/K)$, et soit A_0 l'ensemble énuméré par $\overline{a}_0$. Par la première partie de 4.1.7, on a $A_i = \mathrm{cl}_\omega(A_i)$ pour tout i. Pour $i = 1, 2$, on pose $A_{\{0,i\}} := \mathrm{acl}_1(A_i\overline{a}_i)$, et on définit $A_{\{1,2\}} := \mathrm{acl}_1(A_1A_2)$. Avec les plongements ι_k^w évidents on est alors exactement dans le cadre du Lemme 4.1.10. Pour cela, il suffit de noter que les $\downarrow^*$-indépendances donnent $A_w = \mathrm{cl}_\omega(A_w)$ pour tout w. Soient $A \leq K^*$ et ι_w, ι_k comme dans 4.1.10. Quitte à appliquer un automorphisme, on peut supposer que $\iota_{\{1,2\}}$ est une inclusion (donc par construction ι_1 et ι_2 aussi). En utilisant le Corollaire 4.1.7.(2), il est immédiat que l'image $\overline{a}$ de $\overline{a}_0$ dans A par le plongement ι_0 a les propriétés cherchées.

Si T_1 est fortement minimale, on raisonne comme dans la preuve du Théorème 3.1.9. Les arguments sont plus élémentaires que dans la fusion libre, et on omet les détails. $\square$

Comme dans la fusion libre (Section 2.5), on a le résultat suivant :

Remarque 4.1.12. *Soit T_ω la théorie de la courbe générique, et $(M, P(M))$ une paire ($\aleph_\epsilon$-)magnifique de modèles de T_ω, avec $T_\omega^{\mathfrak{P}} := \mathrm{Th}(M, P(M))$. Alors, un modèle suffisamment saturé de $T_\omega^{\mathfrak{P}}$ est encore une paire ($\aleph_\epsilon$-)magnifique. La théorie T_ω a donc la* wnfcp.

Exemples 4.1.13. (1) Soit $T_1 = \mathrm{EV}_K$, la théorie d'un K-espace vectoriel infini pour un corps (gauche) K qui contient un élément $\alpha \neq 0$ qui n'est pas une racine de l'unité.

On se place dans la topologie de Zariski correspondante, où les fermés sont exactement les ensembles positivement définissables, c'est à dire les réunions finies de K-sous-espaces affines définissables de V^m. Les fermés irréductibles correspondent alors aux K-sous-espaces affines définissables.

Contrairement au cas de la théorie ACF_0, la courbe générique au-dessus de T_1 ne peut pas être approximée par des (V, C_0) où C_0 est une courbe plane $\mathcal{L}_1$-définissable irréductible et $V \models \mathrm{EV}_K$. Cela se voit par exemple ainsi : Soit $X \subseteq V^m$ un sous-ensemble définissable dans EV_K. Alors, X est un sous-espace affine (un fermé irréductible) si et seulement si X est clos par les fonctions $\lambda_\alpha(\overline{x}, \overline{y}) := \overline{x} + \alpha(\overline{y} - \overline{x})$ et $\mu(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) := \overline{x} + \overline{y} - \overline{z}$.

Notons que par convention, $\emptyset$ est également un fermé irréductible.

Clairement, tout K-sous-espace affine de V^m est clos par λ_α et μ. Réciproquement, soit $X \subseteq V^m$ un ensemble définissable clos par λ_α et μ. On peut supposer que X contient au moins 2 éléments différents, car tout ensemble contenant au plus un élément est un K-sous-espace affine.

Pour $\overline{x} \neq \overline{y}$ dans X, itérant λ_α, on voit que $\overline{x} + \alpha^m(\overline{x} - \overline{y}) \in X$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Or, ces éléments sont distincts par le choix de $\alpha \in K$. On en déduit que X est infini.

Puis, si X n'était pas Zariski-clos (i.e. positivement définissable), on trouverait une droite affine K-définissable $D \subseteq V^m$ telle que $D \cap X \subsetneq D$ soit un sous-ensemble propre cofini de D. Or, à l'aide de λ_α, on trouverait donc pour tout $\overline{a} \in D \setminus X$ (c'est un ensemble fini non-vide) des éléments $\overline{x}, \overline{y} \in D \cap X$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $\overline{a} = \overline{x} + \alpha^m(\overline{y} - \overline{x})$, une contradiction. Cela montre que X est Zariski-clos, c'est à dire une réunion finie de K-sous-espaces affines définissables C_i. Soit C_1 une composante de dimension maximale. Alors, s'il existe $\bar{z} \in X \setminus C_1$, il suffit de choisir $\overline{y} \in C_1$ et d'utiliser la fonction μ pour montrer que l'ensemble $C_1 + (\bar{z} - \overline{y})$ est contenu dans X. Ainsi, à l'aide de λ_α, on obtient une infinité de sous-ensembles définissables de X qui sont 2 à 2 disjoints et qui ont la même dimension que C_1. Cela contredit $\dim(C_1) = \dim(X)$. Donc, un ensemble définissable X qui est clos par λ_α et μ est fermé et irréductible.

En particulier, on sait définir les fermés irréductibles parmi tous les fermés dans EV_K. Par ailleurs, on voit que dans un modèle (V, C) de T_ω, l'ensemble C n'est pas clos par λ_α (par 4.1.8, par exemple).

Si K est fini, on peut raisonner de manière différente pour arriver au même résultat : un ensemble définissable $X \subseteq V^m$ est un fermé irréductible si et seulement si c'est une cosette d'un K-sous-espace vectoriel définissable et irréductible de V^m. Il y a un nombre fini de tels sous-espaces, et on sait donc isoler les fermés irréductibles par une formule.

(2) Soit T_1 la théorie d'un corps pseudofini. Comme dans un corps algébriquement clos, le degré fournit une mesure pour décrire la "complexité" d'une courbe plane. On peut donc espérer pouvoir représenter, de manière naturelle, la théorie T_ω comme limite de théories $T_d = \mathrm{Th}(F, C_d)$ où F est pseudofini et C_d une courbe plane de degré d, avec un paramètre générique. Cependant, il n'y a pas de choix unique pour les paramètres génériques, et la limite de telles théories T_d (si elle existe) pourrait dépendre des choix de paramètres. D'où la question suivante (une réponse positive, même à la première partie, paraît probable, mais nous n'avons pas exploré cette question en profondeur ; on ne peut d'ailleurs pas imaginer une réponse positive à la seconde partie qui ne passerait pas par la première).

Questions :

- Est-ce que la limite de telles théories T_d est égale à T_ω, et cela indépendamment du choix des paramètres génériques pour définir les courbes C_d ?
- Est-ce qu'il existe un choix de paramètres pour lequel les théories T_d aient la limite T_ω ?

4.2 Structures bicolores

Afin de construire un corps algébriquement clos de rang de Morley 2, Poizat [Po99] a introduit les *corps noirs*. Un corps noir est un corps algébriquement clos K avec un sous-ensemble $N^K \subseteq K$ (l'ensemble des points noirs de K), considéré dans le langage des anneaux augmenté par un nouveau prédicat unaire N. Il utilise la prédimension $\delta(\overline{a}) := 2\,\mathrm{deg.\,tr}(\overline{a}) - |N^{\overline{a}}|$, variant ainsi légèrement la technique de fusion de Hrushovski [Hr92], pour obtenir un corps algébriquement clos ω-stable K tel que $\mathrm{RM}(\mathfrak{g}) = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \omega \cdot 2$ pour le type générique $\mathfrak{g}$ de K.

Cette première amalgamation (sans collapse) fournit déjà un contre-exemple à la *conjecture de Berline-Lascar* : "Si K est un corps superstable avec type générique $\mathfrak{g}$, alors $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \omega^\alpha$ pour un $\alpha \in \mathrm{On}$".

Puis, travaillant dans une classe restreinte de corps noirs, Poizat construit des corps noirs collapsés (toujours dans [Po99]). Baldwin et Holland [BH00] ont ensuite montré que certains de ces corps collapsés sont saturés, d'où l'existence de corps de rang de Morley 2 (en toute caractéristique).

Dans une autre construction, Poizat [Po01] considère des corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ avec un sous-groupe du groupe additif (ces corps sont appelés *corps rouges*), donc des structures de la forme (K, R^K), où $K \models ACF_p$ et $R^K \leq (K, +)$, dans le langage des anneaux augmenté par le prédicat R désignant les *points rouges* dans K. En utilisant la prédimension $\delta(\overline{a}) := 2\,\text{deg. tr}(\overline{a}) - \text{l. dim}_{\mathbb{F}_p}(R^{\overline{a}})$ (où $\text{l. dim}_{\mathbb{F}_p}$ désigne la dimension linéaire sur $\mathbb{F}_p$), il construit un corps rouge ω-stable K de rang $\omega \cdot 2$, avec $\text{RM}(R^K) = \omega$. Tout récemment, Baudisch, Martin-Pizarro et Ziegler [BMZ05b] sont arrivés à collapser cette théorie, obtenant ainsi un corps de rang de Morley 2 avec un sous-groupe fortement minimal du groupe additif.

Pour donner une interprétation commune aux corps noirs et rouges, on considère une théorie fortement minimale T_1 ayant un réduit T_0, et on étudie les structures de la forme (M, R^M), où $M \models T_1$ et $R^M \preccurlyeq_{T_0} M$, donc des modèles de T_1 avec un prédicat unaire R pour une sous-structure élémentaire de M au sens de T_0. Certaines structures de la forme décrite seront appelées *structures bicolores*. Le but est d'en construire des exemples ω-stables de rang $\omega \cdot 2$, voire même de rang 2. Dans le cas des corps noirs, $T_1 = ACF_p$ (p arbitraire) et T_0 est la théorie d'un ensemble infini sans structure, tandis que dans le cas des corps rouges, on traite $T_1 = ACF_p$ (p premier) et $T_0 = \text{EV}_{\mathbb{F}_p}$.

C'est ce point de vue que nous généralisons dans la suite. Pour cela, comme dans le cas de la fusion, il faut imposer des restrictions importantes sur T_0 pour pouvoir effectuer la construction. Nous étudions d'abord le cas où T_1 est une théorie supersimple de rang SU égal à 1 (Sous-section 4.2.1) et nous obtenons de nouvelles théories supersimples, puis nous regardons de plus près le cas où T_1 est fortement minimale (Sous-section 4.2.2). Nous obtenons un collapse dans un cas particulier (le contexte bicolore abélien), exactement comme dans le cas de la fusion libre. Enfin, nous arrivons à réduire le problème de l'existence d'un collapse à deux cas : T_0 est la théorie d'un ensemble infini sans structure, ou T_0 est une expansion inessentielle et ω-catégorique de $\text{EV}_{\mathbb{F}_q}$. Or, les preuves des collapses des corps noirs et des corps rouges mentionnées ci-dessus se généralisent à ces deux cas (comme dans la fusion, on doit supposer que T_1 a la DMP), et nous obtenons donc un collapse dans un contexte quelconque.

Comme nous l'avons fait pour la courbe générique, vu les similarités avec la fusion, nous nous permettons d'être bref dans l'étude des structures bicolores.

4.2.1 En supersimple

Nous travaillons dans un contexte complètement analogue à celui de la fusion libre (voir le début du Chapitre 2). Simplement, nous considérons une seule expansion $T_1 \supseteq T_0$ de théories complètes (dans des langages $\mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_0$).

Nous supposons donc :
- T_1 est supersimple de rang SU égal à 1.
- T_0 est fortement minimale, ω-catégorique et modulaire.

Pour simplifier l'exposition, nous demandons de plus :

– Les théories T_i éliminent les quanteurs (dans les langages $\mathcal{L}_i$ correspondants), pour $i = 0, 1$.
– $\mathrm{acl}_1(\emptyset)$ est infini.
– Le langage $\mathcal{L}_1$ est dénombrable.

Si l'expansion $T_1 \supseteq T_0$ satisfait aux hypothèses ci-dessus, on dit que (T_0, T_1) est un *contexte bicolore*.

Soient $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \{R\}$, où R est un nouveau prédicat unaire. Suivant Poizat [Po01] dans notre terminologie, les éléments satisfaisant R sont appelés les *points rouges*, (les autres sont *blancs*). Comme avant, acl_i dénote la clôture algébrique au sens de T_i, et $\mathrm{d}_i(\overline{a}/B) := \mathrm{SU}_{T_i}(\overline{a}/B)$. On considère la classe $\tilde{\mathcal{C}}$ des $\mathcal{L}$-structures de la forme (M, R^M), où $M \models T_1^\forall$ telle que $\mathrm{acl}_1(M) = M$ et où R^M est un sous-ensemble acl_0-clos de M. Puis, $\mathcal{C} := \{M \in \tilde{\mathcal{C}} \mid \mathrm{d}_1(M) < \infty\}$ est la sous-classe des structures finiment engendrées (au sens de acl_1). Comme dans le cas de la courbe générique, acl_1 correspond donc à l'opérateur $\langle\cdot\rangle$ de la fusion libre.

Définition 4.2.1. Soit $M \in \tilde{\mathcal{C}}$, $A \subseteq_\omega M$ et $B \subseteq M$.

(1) $\delta(A) := 2\,\mathrm{d}_1(A) - \mathrm{d}_0(R^A)$, la *prédimension* de A, et $\delta(A/B) := 2\,\mathrm{d}_1(A/B) - \mathrm{d}_0(R^{AB}/R^B)$.

(2) $\tilde{\mathcal{C}}_0 := \{\mathfrak{M} \in \tilde{\mathcal{C}} \mid \delta(A) \geq 0\ \forall A \subseteq_\omega M\}$, $\mathcal{C}_0 := \tilde{\mathcal{C}}_0 \cap \mathcal{C}$. Les structures dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ seront appelées des *structures bicolores*.

(3) Si $M \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, $\mathrm{d}_M(A) := \min\{\delta(\tilde{A}) \mid A \subseteq \tilde{A} \subseteq_\omega M\}$, la *dimension* de A dans M. De manière analogue, on définit la dimension relative $\mathrm{d}_M(A/B) := \min\{\mathrm{d}_M(AB_0) - \mathrm{d}_M(B_0) \mid B_0 \subseteq_\omega B\}$.

(4) Soient $C \subseteq B$ deux sous-ensembles d'une structure dans $\tilde{\mathcal{C}}$. Alors, on pose $C \leq B$ (C est *autosuffisant* ou *fort* dans B) ssi pour tout uplet fini $\overline{b}$ de $\mathrm{acl}_0(B)$ on a $\delta(\overline{b}/C) \geq 0$.

Observons que notre définition de l'autosuffisance a l'inconvénient que $C' \not\leq \mathrm{acl}_0(C')$ est possible. De plus, la fonction δ n'est pas une fonction de prédimension dans le sens de 1.4.8 (l'axiome (P2) n'est pas satisfait). Nous verrons que cela ne cause que des petits problèmes d'adaptation.

On dit que B *contrôle* la structure $K \in \tilde{\mathcal{C}}$ si $\mathrm{acl}_1(B) = K$ et $B \leq K$. Alors, $B \leq \mathrm{acl}_1(B)$ est équivalent à $R^{\mathrm{acl}_1(B)} = \mathrm{acl}_0(R^B)$.

On vérifie sans problème que la classe $\tilde{\mathcal{C}}_0$ est élémentaire. La preuve du lemme suivant est similaire à celle donnée pour la fusion libre (cf. 2.1.1), et il faut donc également passer aux ensembles acl_0-clos dans certains cas, car on doit utiliser la modularité de T_0. La seule différence par rapport au Lemme 2.1.1 se trouve dans (7), mais l'argument est le même, une fois que l'on se restreint aux points rouges.

Lemme 4.2.2. *Soit $K \in \tilde{\mathcal{C}}$, contenant tous les ensembles et uplets considérés.*

(1) (sous-modularité) Soit $A \subseteq B$. Alors, on a $\delta(\overline{c}/\mathrm{acl}_0(A\overline{c}) \cap \mathrm{acl}_0(B)) \geq \delta(\overline{c}/\mathrm{acl}_0(B)) \geq \delta(\overline{c}/B)$. En particulier, si $B \leq C$ et $D \subseteq C$ sont des ensembles acl_0-clos, alors $D \cap B \leq D$.

(2) (transitivité) Si $A \leq B$ et $B \leq C$, alors $A \leq C$.

(3) (continuité) Si $(A_i)_{i \in I}$ est un système filtré de sous-ensembles de C tel que $A_i \leq C$ pour tout i, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \leq C$.

(4) Soient $A_1, A_2 \leq B$ des sous-ensembles forts et acl_0-clos de B. Alors $A_1 \cap A_2 \leq B$.

Si on suppose en outre que $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, alors :

(5) Pour tout $A \subseteq K$ il existe un ensemble $\mathrm{cl}_0^K(A)$ qui est minimal parmi les ensembles A' avec les propriétés suivantes : $A' \supseteq A$, $A' \leq K$ et $A' = \mathrm{acl}_0(A')$. Si A est fini, $\mathrm{cl}_0^K(A)$ est fini aussi. De plus, on a $\mathrm{d}_K(A) = \delta(\mathrm{cl}_0^K(A))$.

(6) Soient $A \subseteq B \subseteq C$ finis. Alors, on a $\mathrm{d}_K(C/A) = \mathrm{d}_K(C/B) + \mathrm{d}_K(B/A)$, $\mathrm{d}_K(B/A) \leq \mathrm{d}_K(C/A)$ et $\mathrm{d}_K(C/A) \geq \mathrm{d}_K(C/B)$.

(7) $\mathrm{d}_K(a/B) \in \{0,1,2\}$ pour tout singleton a. Si a est rouge, alors $\mathrm{d}_K(a/B) \in \{0,1\}$. Soit $\mathrm{cl}_\mathrm{d}^K(B) := \{a \in K \mid \mathrm{d}_K(a/B) = 0\}$ l'opérateur de clôture géométrique. *Si on restreint cet opérateur aux points rouges de K (c'est à dire on considère l'application qui envoie $B \subseteq R^K$ à $\mathrm{cl}_\mathrm{d}^K(B) \cap R$), il définit une prégéométrie.*

La *clôture autosuffisante* est définie par $\mathrm{cl}_\omega^K(A) := \mathrm{acl}_1(\mathrm{cl}_0^K(A))$, pour $A \subseteq K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$. Dans le contexte bicolore, pour formuler l'analogue du Lemme 2.1.5, il faut considérer la théorie $T_0^{\mathfrak{P}}$ des belles paires de modèles de T_0 (ici, on travaille dans le langage $\mathcal{L}_0(R) := \mathcal{L}_0 \cup \{R\}$, où R remplace le symbole usuel P). Ses modèles sont exactement les $\mathcal{L}_0(R)$-structures de la forme (M_0, R^{M_0}) où $R^{M_0} \preccurlyeq_{\mathcal{L}_0} M_0 \models T_0$ avec $\mathrm{d}_0(M_0/R^{M_0})$ infini. Le fait suivant est une conséquence de la modularité et de l'ω-catégoricité (ainsi que l'élimination des quanteurs) de T_0 :

Fait 4.2.3. *Soit $T_0^{\mathfrak{P}}$ la théorie des belles paires de modèles de T_0 (dans le langage $\mathcal{L}_0(R)$). Alors :*

(1) $T_0^{\mathfrak{P}}$ est ω-catégorique et complète.

(2) Dans $T_0^{\mathfrak{P}}$, le type d'un uplet acl_0-clos est déterminé par son $\mathcal{L}_0(R)$-type sans quanteurs. En particulier, $T_0^{\mathfrak{P}}$ est modèle-complète.

Lemme 4.2.4. *Soient $K \in \tilde{\mathcal{C}}$ et $\overline{x}$ un uplet de variables (pas nécessairement fini). Puis, soient $p_1(\overline{x}) \in \mathrm{S}_{T_1}(K)$ et $\pi_0^R(\overline{x})$ un $\mathcal{L}_0(R)$-type partiel sans quanteurs au-dessus de K consistant avec $T_0^{\mathfrak{P}}$ tels que $p_1 \restriction_{\mathcal{L}_0} = \pi_0^R \restriction \mathcal{L}_0$. En particulier, on suppose donc que $\pi_0^R \restriction \mathcal{L}_0$ est un type complet au-dessus de K.*

Alors il existe $K \subseteq L$ et $\overline{a} \in L$ tels que $L \models \pi(\overline{a})$ et L soit contrôlé par $K\overline{a}$.

Preuve. On trouve d'abord $K \preccurlyeq_{T_1} K_1$ et $\overline{a} \in K_1$ tel que $K_1 \models p_1(\overline{a})$.

Quitte à renforcer π_0^R, on peut supposer que π détermine pour tout élément de $\overline{x}$ s'il est rouge ou blanc. Alors, si $\overline{x}_R$ est le sous-uplet de $\overline{x}$ qui est forcé d'être rouge par π_0^R, et si $\overline{a}_R \subseteq \overline{a}$ est le sous-uplet correspondant, il suffit de poser $L := \mathrm{acl}_1(K\overline{a})$ et $R^L := \mathrm{acl}_0(R^K\overline{a}_R)$. La vérification est standard et on omet les détails. □

Soient $K \subseteq L, M$ dans $\tilde{\mathcal{C}}$. On dit que $N \in \tilde{\mathcal{C}}$ contenant L et M est un *amalgame libre* de L et M au-dessus de K si $L \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{1}_{K} M$ et N est contrôlé par LM. À l'aide du Lemme 4.2.4, on montre que les amalgames libres existent. Le Lemme d'amalgamation 2.1.10 est vrai sans changement dans le contexte bicolore. De plus, il y a une seule $\mathcal{L}$-expansion de $\mathrm{acl}_1(\emptyset)$ qui est dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ (un élément a de $\mathrm{acl}_1(\emptyset)$ est rouge si et seulement si $a \in \mathrm{acl}_0(\emptyset)$, puisque tout R^M est acl_0-clos). Avec les arguments usuels, cela établit

Lemme 4.2.5. *La classe $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$ est connexe et a la propriété d'amalgamation (AP).*

Les structures riches pour $(\mathcal{C}_0, \leq)$ existent dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$: toute structure bicolore $A \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ se plonge fortement dans une structure bicolore riche de cardinalité $\leq 2^{|A|+\aleph_0}$. Deux structures riches sont $\mathcal{L}_{\infty,\omega}$-équivalentes. □

On définit les extensions *parasites* et *primitives* comme dans 2.2.1. Par contre, au niveau des extensions génériques, il y a un petit changement à faire en comparaison avec la fusion libre, car il y en a de deux sortes. Soit $K \leq L$ une extension finiment engendrée dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$.

- L/K est *générique blanche* si $R^L = R^K$ et $L = \mathrm{acl}_1(Ka)$ pour un (tout) $a \in L \setminus K$. On a $\mathrm{d}(L/K) = \mathrm{d}(a/K) = 2$, et l'élément a est *générique blanc* au-dessus de K.
- L/K est *générique rouge* s'il existe un élément rouge $a \in L \setminus K$ tel que $R^L = \mathrm{acl}_0(R^K a)$ et $L = \mathrm{acl}_1(Ka)$. On a $\mathrm{d}(L/K) = \mathrm{d}(a/K) = 1$, et l'élément a est *générique rouge* au-dessus de K.

La notion d'une extension *première* $B \leq A$ pour des sous-ensembles acl_0-clos $B \subseteq A$ d'une structure bicolore dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ est exactement celle de 2.2.3 : on demande que $\mathrm{d}_0(A/B)$ soit fini et ≥ 2, $\delta(A/B) = 0$ et $\delta(A'/B) > 0$ pour tout $B \subsetneq A' = \mathrm{acl}_0(A') \subsetneq A$.

Pour des ensembles acl_0-clos $B' \subseteq B$ avec $R^B = R^{B'}$, on a trivialement $\delta(B/B') \geq 0$. Donc, si A/B est une extension première, il existe forcément une $\mathcal{L}_0$-base rouge de A au-dessus de B. De plus, on en déduit que pour une extension $K \leq L$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ et $A := \mathrm{acl}_0(KR^L)$, on a L/K primitive si et seulement si A/K est première. Si L/K est primitive, l'ensemble A est alors le plus petit ensemble acl_0-clos contenant K qui contrôle L (comparer avec le Lemme 2.2.14).

Comme une extension première a une $\mathcal{L}_0$-base rouge, une légère variation de la preuve de 2.2.4 nous donne le résultat suivant.

Lemme 4.2.6. *Soit A/B une extension première (au sein de K^*), et soit $B \subseteq B' \subseteq K^*$ avec B' acl_0-clos. On pose $A' := \mathrm{acl}_0(AB')$. Alors on a :*

(1) Si $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{1}_{B} A$, alors A'/B' est première et $B' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{B} A$.

(2) $\delta(A/B') = \delta(A'/B') \leq 0$, et on a égalité ssi ou bien $A \subseteq B'$ ou bien A'/B' est première.

(3) Si $B' = \mathrm{cl}_0(B')$, alors $A \subseteq B'$ ou A'/B' est première. □

Une extension parasite se décompose en une tour finie d'extensions primitives, et la longueur d'une telle décomposition ne dépend pas de la décomposition choisie. Le Lemme de décomposition 2.2.11 dans le contexte bicolore prend la forme suivante :

Lemme 4.2.7. *Soit $K \leq L$ une extension finiment engendrée dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ avec $\mathrm{d}(L/K) = d$. Alors, il y a une décomposition $K = K_0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_m = L$, où K_i/K_{i-1} est générique rouge pour $i \leq m_0$, générique blanche pour $m_0 < i \leq m_1$ et primitive pour $m_1 < i \leq m$. De plus, $2m_1 - m_0 = d$.*

Esquisse de preuve. Comme L/K est finiment engendrée, $\mathrm{d}_0(R^L/K)$ est fini. On choisit d'abord une d-base $r_1, \ldots, r_{m_0}$ de R^L sur K. Cela fournit la suite des extensions génériques rouges, pour $K_i := \mathrm{acl}_1(Kr_1 \ldots r_i)$. Comme $\mathrm{d}(R^L/K_{m_0}) = 0$, tout $b \in L$ avec $\mathrm{d}(b/K) > 0$ est forcément générique blanc. On peut donc inductivement choisir des extensions génériques blanches $K_{m_0} \leq K_{m_0+1} \leq \ldots \leq K_{m_1}$ jusqu'à ce que $\mathrm{d}(L/K_{m_1}) = 0$. Enfin, la décomposition d'une extension parasite en une tour d'extensions primitives est facile dans le contexte bicolore. □

Soit T_ω la $\mathcal{L}$-théorie des structures bicolores riches (une théorie complète par 4.2.5). Comme dans les cas précédents, nous voulons axiomatiser cette théorie et montrer ensuite qu'elle est supersimple avec une notion de déviation bien concrète. Nous commençons par un lemme analogue à 2.3.3. La preuve est similaire et utilise 4.2.6.

Lemme 4.2.8. *Soient $\overline{a}/\overline{b}$ une extension première et $\varphi_0^R(\overline{x}, \overline{z})$ une $\mathcal{L}_0(R)$-formule sans quanteurs isolant $\mathrm{tp}_{T_0^{\mathfrak{P}}}(\overline{a}\overline{b})$. Puis, soit $\varphi_1(\overline{x}, \overline{z})$ une $\mathcal{L}_1$-formule rang-complète (cf. 2.3.1) telle que $\mathrm{tp}_1(\overline{a}/\overline{b})$ soit générique dans $\varphi_1(\overline{x}, \overline{b})$.*

Alors pour tout $\overline{a}', \overline{b}' \in K' \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ avec $K' \models \varphi_0^R(\overline{a}', \overline{b}') \wedge \varphi_1(\overline{a}', \overline{b}')$ on a
- *ou bien $\overline{a}' \in \mathrm{cl}_0(\overline{b}')$,*
- *ou bien $\overline{a}'/\overline{b}'$ est une extension première.* □

Notons que l'on peut toujours trouver une $\mathcal{L}_0(R)$-formule sans quanteurs isolant $\mathrm{tp}_{T_0^{\mathfrak{P}}}(\overline{a}\overline{b})$ par le Fait 4.2.3, car $\overline{a} \supseteq \overline{b}$ est acl_0-clos. Une formule $\varphi(\overline{x}, \overline{z}) := \varphi_0^R(x, \overline{z}) \wedge \varphi_1(\overline{x}, \overline{z})$ comme dans le Lemme 4.2.8 est appelée une *famille première*. Pour une telle famille première φ, on pose $\theta_\varphi(\overline{z}) := \exists \overline{x} \varphi_0^R(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \exists \overline{x} \varphi_1(\overline{x}, \overline{z})$, où l'interprétation de $\exists \overline{x} \varphi_0^R(\overline{x}, \overline{z})$ se fait dans $T_0^{\mathfrak{P}}$. Cette formule étant équivalente à une $\mathcal{L}_0(R)$-formule sans quanteurs ($\overline{b}$ est acl_0-clos !) il n'y a pas d'ambiguïté.

Nous avons tout ce qu'il faut pour pouvoir donner une axiomatisation de T_ω dans le contexte bicolore. Soit T'_ω la $\mathcal{L}$-théorie donnée par (les $\mathcal{L}$-formules existentielles à quantification bornées sont définies précisément comme dans la fusion libre, voir 2.3.4) :

$T'_\omega(1)$: $\mathrm{Th}(\tilde{\mathcal{C}}_0)$

$T'_\omega(2)$: T_1

$T'_\omega(3)$: Pour toute famille première $\varphi(\overline{x}, \overline{z}) := \varphi_0^R(x', \overline{z}) \wedge \varphi_1(\overline{x}, \overline{z})$ l'axiome

$$\forall \overline{z} \exists \overline{x} [\theta_\varphi(\overline{z}) \rightarrow \varphi(\overline{x}, \overline{z})].$$

$T'_\omega(4)$: Soient $\varphi_1(x,\bar{z})$ une $\mathcal{L}_1$-formule et $\chi_{\varphi_1}(\bar{z}) := \exists^\infty x\varphi_1(x,\bar{z})$. Puis, soit $\tau(x,\bar{z})$ une $\mathcal{L}$-formule existentielle à quantification bornée, telle que $K \models \tau(a,\bar{b})$ implique $\mathrm{d}(a/\bar{b}) = 0$. Pour φ_1 et τ, on met l'axiome

$$\forall\bar{z}\exists x[\chi_{\varphi_1}(\bar{z}) \to x \in R \wedge \varphi_1(x,\bar{z}) \wedge \neg\tau(x,\bar{z})].$$

$T'_\omega(5)$: Soient $\varphi_1(x,\bar{z})$, $\chi_{\varphi_1}(\bar{z})$ et $\tau(x,\bar{z})$ comme dans (4). Pour φ_1 et τ, on met l'axiome

$$\forall\bar{z}\exists x[\chi_{\varphi_1}(\bar{z}) \to x \notin R \wedge \varphi_1(x,\bar{z}) \wedge \neg\tau(x,\bar{z})].$$

La preuve du résultat suivant ainsi que celle du Corollaire 4.2.10 se fait comme dans le cas de la fusion libre. Nous nous contentons donc d'une esquisse de preuve du premier et nous omettons la preuve du dernier.

Proposition 4.2.9. *Les modèles $\aleph_\epsilon$-saturés de T_ω sont exactement les structures bicolores riches dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$. En particulier, on a $T'_\omega = T_\omega$.*

Esquisse de preuve. D'abord, on montre comme dans la preuve de 2.3.14 qu'une structure riche est un modèle de T'_ω.

Puis, en utilisant le Lemme 4.2.8 et le Lemme de décomposition 4.2.7, on montre que le Lemme 2.3.5 reste vrai dans le contexte bicolore sans changement. On en déduit qu'il y a suffisamment de formules existentielles à quantification bornée dans le contexte bicolore. À l'aide de cela, on établit que tout modèle $\aleph_1$-saturé de T'_ω est riche (le schéma d'axiomes $T'_\omega(3)$ nous garantit que l'on peut traiter les extensions primitives, tandis que $T'_\omega(4)$ et $T'_\omega(5)$ fournissent des approximations pour des plongements forts d'extensions génériques rouges et blanches, respectivement).

On en déduit que toute structure bicolore riche est $\aleph_0$-saturée.

Enfin, l'égalité "riche=$\aleph_\epsilon$-saturé" se montre comme la Remarque 2.3.15, dont nous n'avons pas donné la preuve parce qu'elle est très facile. □

Corollaire 4.2.10. *(0) La clôture algébrique dans T_ω est donnée par la clôture autosuffisante cl_ω.*

(1) Soient $A_i \subseteq M_i \models T_\omega$ pour $i = 1,2$. Alors $\mathrm{tp}_\omega(A_1) = \mathrm{tp}_\omega(A_2)$ ssi $\mathrm{cl}_0^{K_1}(A_1) \cong_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_0^{K_2}(A_2)$ ssi $\mathrm{cl}_\omega^{K_1}(A_1) \cong_{\mathcal{L}} \mathrm{cl}_\omega^{K_2}(A_2)$.

(2) Soit $\mathcal{L}^*$ l'expansion par définitions de $\mathcal{L}$ donnée par l'ensemble des $\mathcal{L}$-formules existentielles à quantification bornée, et soit T^*_ω la $\mathcal{L}^*$-théorie obtenue en ajoutant les définitions des nouveaux prédicats R_τ. Alors T^*_ω élimine les quanteurs.

(3) La $\mathcal{L}$-théorie T_ω est presque modèle-complète. □

Un énoncé plus fin est possible, car contrairement à la fusion libre on a un bon contrôle sans hypothèse supplémentaire, et cela même si la théorie T_1 n'est pas fortement minimale :

Lemme 4.2.11. *Soit (T_0, T_1) un contexte bicolore.*

(1) Soient $A \subseteq K \in \tilde{\mathcal{C}}$ et $A' \subseteq K' \in \tilde{\mathcal{C}}$ tels que A contrôle K et A' contrôle K'. Alors, tout $\mathcal{L}$-isomorphisme $\iota : A \cong A'$ s'étend en un $\mathcal{L}$-isomorphisme $\tilde{\iota} : K \cong K'$.

(2) Soient $A, A' \leq K^* \models T_\omega$. Alors $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(A) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(A')$ entraîne $\mathrm{tp}_\omega(A) = \mathrm{tp}_\omega(A')$.

Preuve. Dans la situation de (1), soit $\iota : A \cong A'$ un $\mathcal{L}$-isomorphisme. Comme $K = \mathrm{acl}_1(A)$ et $K' = \mathrm{acl}_1(K')$, on trouve un $\mathcal{L}_1$-isomorphisme $\tilde{\iota} : K \cong K'$ étendant ι. $A \leq K$ entraîne $R^K = \mathrm{acl}_0(R^A)$, et similairement $R^{K'} = \mathrm{acl}_0(R^{A'})$. Puisque acl_0 est invariant par $\mathcal{L}_1$-isomorphisme, $\tilde{\iota}$ doit préserver R aussi. C'est donc un $\mathcal{L}$-isomorphisme.

La partie (2) est une conséquence de (1), par le Corollaire 4.2.10(1). □

Nous fixons la même notion d'indépendance que dans la fusion libre :

Définition 4.2.12. Soient $A, B, C \subseteq K$, où $K \models T_\omega$. On pose $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{*}_{B} C$ si et seulement si

(i) $\mathrm{cl}_\omega(BA) \cap \mathrm{cl}_\omega(BC) = \mathrm{cl}_\omega(B)$ et

(ii) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{B} C$.

Lemme 4.2.13. *Soient $B \subseteq A, C \subseteq K$ des sous-ensembles cl_ω-clos de $K \models T_\omega$. Alors sont équivalents :*

(1) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{*}_{B} C$.

(2) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{1}_{B} C$ et $AC \leq K$.

(3) $D := \mathrm{acl}_1(AC)$ est un amalgame libre de A et C au-dessus de B, et $D \leq K$.

Preuve. La preuve est similaire à celle de la Remarque 2.4.2. Nous montrons uniquement (1)⇒(2), les autres implications étant plus faciles.

Soit $\overline{a} \in A$ fini tel que $B\overline{a} \leq A$. En particulier, $R^{\mathrm{acl}_0(B\overline{a})} = \mathrm{acl}_0(R^{B\overline{a}})$. En utilisant la modularité de T_0 et $A \cap C = B$, on obtient $\mathrm{d}_0(R^{\overline{a}}/R^C) = \mathrm{d}_0(R^{\overline{a}}/R^B)$. Comme $B\overline{a} \leq A = \mathrm{cl}_\omega(A)$, on a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\overline{a}/C) &\leq \delta(\mathrm{acl}_0(C\overline{a})/C) = 2\,\mathrm{d}_1(\overline{a}/C) - \mathrm{d}_0(R^{\mathrm{acl}_0(C\overline{a})}/R^C) \\ &\leq 2\,\mathrm{d}_1(\overline{a}/B) - \mathrm{d}_0(R^{\mathrm{acl}_0(C\overline{a})}/R^C) \leq 2\,\mathrm{d}_1(\overline{a}/B) - \mathrm{d}_0(R^{\overline{a}}/R^C) \\ &= 2\,\mathrm{d}_1(\overline{a}/B) - \mathrm{d}_0(\mathrm{acl}_0(R^{\overline{a}})/R^B) = \delta(\overline{a}/B) = \mathrm{d}(\overline{a}/B). \end{aligned}$$

Comme $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\mathrm{d}}_{B} C$, on a égalité partout. Cela montre (dans l'ordre des inégalités de gauche à droite) : $\mathrm{acl}_0(C\overline{a}) \leq K$, $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{1}_{B} C$ et $C\overline{a} \leq \mathrm{acl}_0(C\overline{a})$. On en déduit (2). □

Lemme 4.2.14. *Soient $K \leq A_0, A_1, A_2$ des structures bicolores dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$, avec $K \models T_1$. Supposons donnés $A_{\{0,1\}}, A_{\{0,2\}}$ et $A_{\{1,2\}}$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ ainsi que des K-plongements forts $\iota_k^w : A_k \hookrightarrow A_w$ dès que $k \in w$, tels que $A_{\{i,j\}}$ soit un amalgame libre des images de A_i et A_j sous les plongements en question.*

Alors il existe $K \leq A \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et des K-plongements forts $\iota_w : A_w \hookrightarrow A$ satisfaisant

(1) $\iota_w \circ \iota_k^w = \iota_{w'} \circ \iota_k^{w'}$ *si* $k \in w \cap w'$ *(ce plongement est noté* ι_k*),*

(2) $\iota_0(A_0), \iota_1(A_1), \iota_2(A_2)$ *est une suite* $\downfree^*$*-indépendante au-dessus de* K*.*

Preuve. La preuve est similaire à celle donnée pour la courbe générique (Lemme 4.1.10). Pour $i \neq j$, on a $A_{\{i,j\}} = \mathrm{acl}_1(A_iA_j) = \mathrm{cl}_\omega(A_iA_j)$. Par le théorème d'indépendance dans T_1, on trouve donc des $\mathcal{L}_1$-plongements $\iota'_w : A_w \hookrightarrow M' \models T_1$ satisfaisant la condition (1) ainsi que (posant $\iota'_k := \iota'_w \circ \iota_k^w$)

(2′) $\iota'_0(A_0), \iota'_1(A_1), \iota'_2(A_2)$ est une suite $\downfree^1$-indépendante au-dessus de K.

On pose $A'_i := \iota'_i(A_i) \subseteq M'$ et $A'_w := \iota'_w(A_w)$, et on considère $A' := \mathrm{acl}_1(A'_0A'_1A'_2) = \mathrm{acl}_1(\bigcup_w A'_w)$. Puis, on définit une $\mathcal{L}$-expansion A de A' comme suit : $R^A := \mathrm{acl}_0(\bigcup_w \iota'_w(R^{A_w}))$.

En utilisant la propriété de compatibilité (1) pour les plongements ι'_w, on vérifie que les applications ι'_i ainsi que ι'_w sont des $\mathcal{L}$-plongements avec cette définition (on les notera ι_i et ι_w, respectivement). Par construction, la structure A est (par exemple) un amalgame libre de $\iota_0(A_0)$ et $\iota_{\{1,2\}}(A_{\{1,2\}})$ au-dessus de K, ce qui établit (2). □

Théorème 4.2.15. *Dans le contexte bicolore, la théorie* T_ω *est supersimple, et la relation de non-déviation dans* T_ω *est donnée par* $\downfree^*$*.*

Soit $K \leq L \leq K^* \models T_\omega$ *avec* L/K *parasite. Alors* $\mathrm{SU}(L/K)$ *est égal à la longueur d'une décomposition de* L/K *en extensions primitives. De plus,* $\mathrm{SU}(r/K) \leq \omega$ *pour tout élément* r *qui est générique rouge au-dessus de* K*, et* $\mathrm{SU}(b/K) \leq \omega \cdot 2$ *pour tout élément* b *qui est générique blanc au-dessus de* K*.*

Preuve. Comme dans les preuves précédentes, nous utilisons le Théorème de Kim-Pillay pour obtenir la (super-)simplicité de T_ω ainsi que $\downfree = \downfree^*$. Comme avant, la seule difficulté éventuelle est le théorème d'indépendance. Or, le résultat nécessaire d'amalgamation est montré dans le Lemme 4.2.14.

Nous calculons le rang SU d'une extension parasite à l'aide des inégalités de Lascar. Puis, pour r générique rouge au-dessus de $K = \mathrm{cl}_\omega(K)$, toute extension déviante de $\mathrm{tp}_\omega(r/K)$ à $L = \mathrm{cl}_\omega(L) \supseteq K$ devient parasite (dans le sens où $\mathrm{cl}_\omega(Lr)/L$ est une extension parasite), d'où $\mathrm{SU}(r/K) \leq \omega$. Finalement, considérons b générique blanc au-dessus de K, et soit $L = \mathrm{cl}_\omega(L) \supseteq K$ tel que $\mathrm{tp}_\omega(b/L)$ dévie au-dessus de K. D'après la définition de $\downfree^*$, on a alors $\mathrm{d}(b/L) \leq 1$. Dans une décomposition de $L \leq \mathrm{cl}_\omega(La)$ comme dans le Lemme de décomposition 4.2.7, ne figurent donc que des extensions primitives et au plus une extension générique *rouge*. Par les inégalités de Lascar (Fait 1.1.5), on déduit des rangs calculés antérieurement que $\mathrm{SU}(b/L) < \omega \cdot 2$, d'où $\mathrm{SU}(b/K) \leq \omega \cdot 2$. □

Corollaire 4.2.16. *Tout type parasite est monobasé.*

Preuve. On raisonne comme dans le cas de la fusion libre (Proposition 2.4.14). Soit donc $K \leq L$ une extension parasite, et $K \leq M \leq K^* \models T_\omega$ une extension quelconque. Alors, $L \downfree_K M$ si et seulement si $L \cap M = K$. Cela suit directement de la définition de $\downfree^*$ (et du Théorème 4.2.15), car $\mathrm{d}(L/K) = 0$ et $L \downfree^{\mathrm{d}}_K M$ est donc toujours vrai. □

Comme dans la fusion libre (voir le Corollaire 2.5.11), on peut montrer le résultat suivant :

Remarque 4.2.17. *Dans le contexte bicolore, T_ω a la* wnfcp.

4.2.2 En ω-stable

Dans cette sous-section, nous étudions en plus de détails les contextes bicolores dans le cas où T_1 est fortement minimale. En particulier, nous effectuons des calculs de rang, et nous donnons un résultat de coordinatisation (Proposition 4.2.30). Les hypothèses données aux début de la Sous-section 4.2.1 restent en vigueur, et nous demandons de plus :

- La théorie T_1 est fortement minimale.
- L'expansion $T_1 \supseteq T_0$ renforce la prégéométrie, c'est à dire pour tout $A \subseteq M \models T_1$ et tout $a \in M$ avec $\mathrm{d}_1(a/A) = 1$ on a $\mathrm{acl}_0(Aa) \subsetneq \mathrm{acl}_1(Aa)$.

Si les hypothèses ci-dessus sont satisfaites pour l'expansion $T_1 \supseteq T_0$, on dit que (T_0, T_1) est un *contexte bicolore fortement minimal.*

Comme dans le cas de la fusion libre ω-stable (Chapitre 3), la dernière hypothèse sert uniquement à exclure des cas dégénérés. Ainsi, on évite des distinctions de cas inintéressants par la suite.

D'abord, dans le contexte bicolore fortement minimal, on voit que les analogues des résultats de la Section 3.1 sont vrais sans hypothèse supplémentaire, car on a un bon contrôle dans tout contexte bicolore d'après le Lemme 4.2.11. Toute structure bicolore $L \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ étant un modèle de T_1 (on rappelle que $\mathrm{acl}_1(\emptyset)$ est infini par hypothèse), on a l'unicité de l'amalgame libre dans $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$ par stationarité des $\mathcal{L}_1$-types au-dessus d'un tel L. Comme toute structure $k \in \mathcal{C}_0$ est contrôlée par un uplet fini, la classe $(\mathcal{C}_0, \leq)$ est dénombrable, ainsi que la classe des $k \leq l \in \mathcal{C}_0$ pour k fixé, à k-isomorphisme près. Il existe donc une unique structure bicolore riche et dénombrable K_ω : la limite de Fraïssé de $(\mathcal{C}_0, \leq)$. On voit également que les structures bicolores riches sont exactement les modèles ω-saturés de T_ω. L'analogue du Lemme 3.1.6 dans le contexte bicolore fortement minimal devient :

Lemme 4.2.18. *Soient $\overline{a}, B \subseteq K^* \models T_\omega$ avec $\mathrm{d}(\overline{a}/B) = 0$. On suppose que $k := \mathrm{cl}_\omega(B)$ est finiment engendrée (c'est équivalent à $\mathrm{d}_1(B) < \infty$). Alors $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/B)$ est isolé.*

Preuve. On peut supposer que $B = \mathrm{cl}_\omega(B) = k$ et (quitte à agrandir $\overline{a}$) que $\delta(\overline{a}/k) = 0$. Soit $\overline{b} = \mathrm{cl}_0(\overline{b}) \leq k$ fini tel que $\delta(\overline{a}/\overline{b}) = 0$. On montre d'abord :

$(*)$ $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/\overline{b})$ est isolé.

Pour prouver $(*)$, notons que comme $\delta(\overline{a}/\overline{b}) = 0$ et $\overline{b} \leq K^*$, on a automatiquement $\overline{a}\overline{b} \leq K^*$. A fortiori, $\mathrm{acl}_0(R^{\overline{b}\overline{a}}) = R^{\mathrm{acl}_0(\overline{b}\overline{a})}$ (ainsi que $\mathrm{acl}_0(R^{\overline{b}}) = R^{\mathrm{acl}_0(\overline{b})}$), et $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}/\overline{b})$ détermine $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/\overline{b})$ (par 4.2.11(2)). On choisit une $\mathcal{L}_0(R)$-formule $\varphi_0^R(\overline{x}, \overline{b})$ isolant $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}_0(R)}(\overline{a}/\overline{b})$ et une $\mathcal{L}_1$-formule $\varphi_1(\overline{x}, \overline{b})$ telle que

$\mathrm{tp}_{T_1}(\overline{a}/\overline{b})$ soit l'unique type générique dans $\varphi_1(\overline{x},\overline{b})$ au-dessus de $\overline{b}$. Posons $\varphi(\overline{x},\overline{b}) := \varphi_0^R(\overline{x},\overline{b}) \wedge \varphi_1(\overline{x},\overline{b})$.

Si $K^* \models \varphi(\overline{a}',\overline{b})$, on calcule

$$\begin{aligned} 0 \le \delta(\overline{a}'/\overline{b}) &= 2\,\mathrm{d}_1(\overline{a}'/\overline{b}) - \mathrm{d}_0(R^{\mathrm{acl}_0(\overline{a}'\overline{b})}/R^{\overline{b}}) \\ \le 2\,\mathrm{d}_1(\overline{a}'/\overline{b}) - \mathrm{d}_0(R^{\overline{a}'}/R^{\overline{b}}) &\le 2\,\mathrm{RM}_1(\varphi_1(\overline{x},\overline{b})) - \mathrm{d}_0(R^{\overline{a}'}/R^{\overline{b}}) \\ &= 2\,\mathrm{d}_1(\overline{a}/\overline{b}) - \mathrm{d}_0(R^{\overline{a}}/R^{\overline{b}}) = \delta(\overline{a}/\overline{b}) = 0. \end{aligned}$$

On a donc égalité partout. De gauche à droite, cela montre $\delta(\overline{a}'/\overline{b}) = 0$, $\overline{a}'\overline{b} \le \mathrm{acl}_0(\overline{a}'\overline{b})$ et $\mathrm{tp}_{T_1}(\overline{a}'/\overline{b}) = \mathrm{tp}_{T_1}(\overline{a}/\overline{b})$. Par conséquent, $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}'/\overline{b}) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}/\overline{b})$ et donc $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}'/\overline{b}) = \mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/\overline{b})$ par 4.2.11. Cela montre $(*)$.

Ensuite, il suffit de choisir un uplet fini $\overline{b} = \mathrm{cl}_0(\overline{b})$ contrôlant k tel que $\mathrm{Cb}_{T_1}(\overline{a}/k) \in \overline{b}$ et $\mathrm{acl}_0(\overline{a}\overline{b}) \cap k = \overline{b}$, puis, appliquant $(*)$, une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\overline{x},\overline{b})$ qui isole $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/\overline{b})$. Pour tout $\overline{a}' \models \varphi(\overline{x},\overline{b})$ on a $\overline{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{\overline{b}} k$, car $k = \mathrm{acl}_1(\overline{b})$, $\mathrm{tp}_{T_1}(\overline{a}'/\overline{b}) = \mathrm{tp}_{T_1}(\overline{a}/\overline{b})$ et $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{0}_{\overline{b}} k$. Comme $\mathrm{tp}_{T_1}(\overline{a}/k)$ est la seule extension non-déviante de sa restriction à $\overline{b}$ par le choix de $\overline{b}$, on conclut par 4.2.11(2), car $k\overline{a}' \le K^*$ pour tout $\overline{a}' \models \varphi(\overline{x},\overline{b})$. □

Comme T_1 est fortement minimale, le type générique rouge est unique (par le résultat d'élimination des quanteurs 4.2.11(2)). On le note $\mathfrak{g}_r$. De même, l'unique type générique blanc est noté $\mathfrak{g}_b$.

Théorème 4.2.19. *Dans un contexte bicolore fortement minimal, T_ω est ω-stable et complète.*

Le rang de Lascar d'une extension parasite est égal au rang de Morley et vaut la longueur d'une décomposition en extension primitives (en particulier, il est fini). On a $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) \le \mathrm{RM}(\mathfrak{g}_r) \le \omega$ et $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_b) \le \mathrm{RM}(\mathfrak{g}_b) \le \omega \cdot 2$.

Preuve. La preuve est similaire à celle du Théorème 3.1.9, à part le calcul de rang des deux génériques. C'est donc cette partie que nous allons démontrer.

D'abord, si r est un élément rouge et $\mathrm{d}(r/B) = 0$, alors on a $\mathrm{RM}(r/B) = \mathrm{U}(r/B) < \omega$. Comme $\mathfrak{g}_r$ est le seul 1-type rouge qui reste, on en déduit que $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) \le \mathrm{RM}(\mathfrak{g}_r) \le \omega$. Puis, on montre par induction sur $n \in \mathbb{N}$:

(ρ_n) Soit $\mathrm{d}(\overline{a}/\overline{b}) = 1$ et $k := \mathrm{cl}_\omega(\overline{b}) \le l_0 \le l_1 \le \ldots \le l_n = \mathrm{cl}_\omega(\overline{a}\overline{b})$ une décomposition telle que l_0/k soit générique rouge et l_i/l_{i-1} primitive pour $i = 1,\ldots,n$. Alors $\mathrm{RM}(\overline{a}/\overline{b}) \le \omega + n$.

Pour $n = 0$, cela suit de $\mathrm{RM}(\mathfrak{g}_r) \le \omega$. Soit donc $n \ge 1$. On peut supposer que $\overline{b} \le \overline{a}\overline{b} \le l_n$. Quitte à agrandir $\overline{b} \subseteq k$, on trouve une $\mathcal{L}$-formule $\varphi(\overline{x},\overline{b})$ qui isole l'extension non-déviante (globale) p de $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/\overline{b})$ parmi toutes les extensions non-déviantes des types de la forme $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}'/k')$, où $\overline{b} \in k' \le K^*$, $\mathrm{d}(\overline{a}'/k') = 1$ et $k' \le l' := \mathrm{cl}_\omega(k'\overline{a}')$ a une décomposition $k' \le l'_0 \le \ldots l'_{n'}$ avec l'_0/k' générique rouge, l'_i/l'_{i-1} primitive pour $i = 1,\ldots,n'$ et $n' \ge n$. Le soin de trouver une formule convenable est laissé au lecteur (essentiellement, il suffit d'utiliser les Lemmes 4.2.8 et 4.2.11(2)). Inductivement, on sait que tous les types dans $\varphi(\overline{x},\overline{b})$

qui sont différents de $\mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/\overline{b})$ sont d'un rang de Morley $\leq \omega+n-1$. A fortiori, $\mathrm{RM}(\overline{a}/\overline{b}) \leq \omega+n$ et (ρ_n) est prouvé.

L'ensemble des (ρ_n) (plus le fait que $\mathrm{RM}(a/\overline{b}) < \omega$ si $\mathrm{d}(a/\overline{b}) = 0$) implique $\mathrm{RM}(p) < \omega \cdot 2$ pour tout 1-type p différent du type générique blanc $\mathfrak{g}_b$. On en déduit que $\mathrm{RM}(\mathfrak{g}_b) \leq \omega \cdot 2$. □

Les calculs de rangs que nous pouvons effectuer ne sont pas entièrement satisfaisants, surtout en comparaison avec le résultat sur la dichotomie des rangs dans la fusion libre (Proposition 3.1.17). Or, comme l'existence de structures d'un certain rang était à l'origine des structures bicolores (les corps noirs de [Po99] sont un contre-exemple à la conjecture de Berline-Lascar mentionnée dans l'introduction de la Section 4.2), nous énonçons quand-même les résultats partiels que nous avons obtenus.

Proposition 4.2.20 (Calculs de rang)**.**

(1) Si T_1 est triviale (donc T_0 aussi), alors

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) = 1 \leq \mathrm{RM}(\mathfrak{g}_r) \leq 2 \ \textit{et} \ \mathrm{U}(\mathfrak{g}_b) = 1 \leq \mathrm{RM}(\mathfrak{g}_b) \leq 3.$$

En particulier, $\mathfrak{g}_b$ est régulier et $\mathfrak{g}_b \perp \mathfrak{g}_r$.

(2) Si T_1 n'est pas triviale, on a toujours $\mathfrak{g}_b \not\perp \mathfrak{g}_r$ et $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) \geq 2$. De plus :

(I) Si $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r)$ n'est pas fini, alors

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) = \mathrm{RM}(\mathfrak{g}_r) = \omega \ \textit{et} \ \mathrm{U}(\mathfrak{g}_b) = \mathrm{RM}(\mathfrak{g}_b) = \omega \cdot 2.$$

C'est le cas par exemple si T_0 est triviale.

(II) Si $2 \leq \mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) = n < \omega$, alors $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_b) = 2\,\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) - 1 > \mathrm{U}(\mathfrak{g}_r)$.

Preuve. La preuve de (1) est facile (et pas vraiment intéressante). Notons que si T_1 est triviale, $\mathrm{acl}_1 = \mathrm{cl}_\omega$ se montre sans peine. Tout s'en déduit.

Pour prouver (2), on observe d'abord que la stratégie que nous avons utilisée pour montrer le résultat analogue dans la fusion libre (Proposition 3.1.17) ne peut pas fonctionner ici. Clairement, pour $\alpha \models \mathfrak{g}_r|k$ avec $k = \mathrm{cl}_\omega(k)$, on ne peut pas trouver d'élément $\alpha' \in \mathrm{cl}_\omega(k\alpha)$ tel que $\mathrm{U}(\alpha/k\alpha') > 0$, car $\mathrm{cl}_\omega(k\alpha) = \mathrm{acl}_1(k\alpha)$. Pour établir $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) \geq \omega$, il faudrait donc construire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une extension déviante de $\mathfrak{g}_r$ de rang $\geq n$.

Comme l'expansion $T_1 \supseteq T_0$ renforce la prégéométrie, elle n'est pas relativement triviale (pour la Définition voir 3.1.14) par la Remarque 3.1.15(4).

Montrons d'abord que $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) \geq 2$. Soit $k \in \tilde{\mathcal{C}_0}$ avec $\mathrm{d}_1(k) \gg 0$. Comme $T_0 \subseteq T_1$ n'est pas relativement triviale, on peut trouver, par le Lemme 3.1.16(2) :

$(*)$ $r, s, r' \in K_1 \succcurlyeq_{\mathcal{L}_1} k$ satisfaisant :

- $\mathrm{d}_1(rs/k) = 2$ et
- $r' \in \mathrm{acl}_1(krs) \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in \mathrm{acl}_0(krs)} \mathrm{acl}_1(k\alpha) \right)$.

Soit $l := \mathrm{acl}_1(krs)$ (l contient r'). On en fait une $\mathcal{L}$-structure (une extension autosuffisante de k) en posant $R^l := \mathrm{acl}_0(krsr')$. Le choix $(*)$ de r, s et r' implique : $\mathrm{acl}_1(kr') \cap \mathrm{acl}_0(krs) = k$, et $k \leq k' := \mathrm{acl}_1(kr')$ est donc une extension générique rouge, et $k' \leq l$ est une extension primitive ($\mathrm{acl}_0(k'rs)/k'$ étant une extension première). En particulier, $\mathrm{U}(r/k') = 1$ et $\mathrm{d}(r/k') = 0$. Par ailleurs, $r \models \mathfrak{g}_r|k$, car $l/\mathrm{acl}_1(kr)$ est une extension primitive (c'est une conséquence de $(*)$ aussi). Donc, $\mathfrak{g}_r$ a une extension déviante non-algébrique, d'où $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) \geq 2$.

Maintenant, nous traitons le générique blanc $\mathfrak{g}_b$. Soit $k \leq K^*$ comme avant, avec $\mathrm{d}_1(k) \gg 0$. Considérons une paire $(r_1, r_2) \models \mathfrak{g}_r^{(2)}|k$, et soit $b \in \mathrm{acl}_1(kr_1r_2) \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathrm{acl}_0(kr_1r_2)} \mathrm{acl}_1(k\alpha)$. Comme $kr_1r_2 \leq K^*$, l'élément b est blanc. Le choix de b entraîne $\mathrm{d}_1(r_1r_2/kb) = 1 = \mathrm{d}_1(r/kb)$ pour tout $r \in \mathrm{acl}_0(kr_1r_2) \setminus k$. En particulier, $R^{\mathrm{acl}_1(kb)} = R^k$. Si on pose $B := \mathrm{acl}_1(kb)$, l'extension $B \leq \mathrm{acl}_0(Br_1r_2)$ est donc première et $B \leq K^*$. Par conséquent, $\mathrm{d}(b/k) = 2$ et $b \models \mathfrak{g}_b|k$.

Les inégalités de Lascar montrent :
- Si $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) < \omega$, alors $2\,\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) = \mathrm{U}(r_1r_2/k) = \mathrm{U}(r_1r_2b/k) = \mathrm{U}(b/k) + \mathrm{U}(r_1r_2/k) = \mathrm{U}(\mathfrak{g}_b) + 1$.
- Si $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) = \omega$, alors $\omega \cdot 2 = \mathrm{U}(r_1r_2b/k) \leq \mathrm{U}(r_1r_2/kb) \oplus \mathrm{U}(b/k) = 1 \oplus \mathrm{U}(\mathfrak{g}_b)$. Donc, $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_b) = \omega \cdot 2$ par le Théorème 4.2.19.

Il nous reste à montrer que si T_0 est triviale (et T_1 non-triviale), alors $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) = \omega$. C'est le contenu de 4.2.23(3), voir ci-dessous. □

Énonçons un résultat de notre preuve de 4.2.20 :

Lemme 4.2.21. *Supposons que T_1 est non-triviale et que k est une structure bicolore avec $\mathrm{d}_1(k) \gg 0$. Alors pour tout $(r_1, r_2) \models \mathfrak{g}_r^{(2)}|k$ il existe $b \in \mathrm{acl}_1(kr_1r_2)$ avec $\mathrm{d}(b/k) = 2$, c'est à dire $b \models \mathfrak{g}_b|k$.* □

Remarque 4.2.22. *Dans le cas (2) de la Proposition 4.2.20, on a $\mathrm{d}(\overline{a}/\overline{b}) = w_{\mathfrak{g}_r}(\overline{a}/\overline{b})$, où $w_p(\overline{a}/\overline{b}) := w_p(\mathrm{stp}(\overline{a}/\overline{b}))$ désigne le p-poids par rapport à un type régulier p (voir [Pi96, Ch. 7] pour la définition de w_p).*

Lemme 4.2.23. *Supposons T_0 triviale et T_1 non-triviale, et soit $B = \mathrm{cl}_0(B) \leq K^*$ tel que $\mathrm{d}_1(B) \gg 0$.*

(1) Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors il existe a_m avec les propriétés suivantes :
  - *$\mathrm{d}(a_m/B) = 0$ ($\mathrm{cl}_\omega(B) \leq \mathrm{cl}_\omega(Ba_m)$ est parasite) et a_m est rouge.*
  - *$\mathrm{U}(a_m/B) = m$.*

(2) Si $B' \leq \mathrm{acl}_0(B'r) = B$ avec $r \models \mathfrak{g}_r|B'$, alors l'élément a_m que l'on trouve dans (1) peut être choisi de manière à ce que $a_m \models \mathfrak{g}_r|B'$.

(3) On a $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) = \omega$.

Preuve. Nous montrons d'abord (1). Soit $B \leq A_1$ une extension première quelconque et $a_1 \in R^{A_1} \setminus B$. Comme $T_0 \subseteq T_1$ n'est pas relativement triviale et $\mathrm{d}_1(B) \gg 0$, il existe a, a' avec $\mathrm{d}_1(aa'/B) = 2$, $a_1 \in \mathrm{acl}_1(Baa')$ et $a_1 \notin \bigcup_{\alpha \in \mathrm{acl}_0(Baa')} \mathrm{acl}_1(B\alpha)$, par 3.1.16(2). On les choisit tels que $aa' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{1}_{Ba_1} A_1$. On définit une extension de A_1 par $A_2 := \mathrm{acl}_0(A_1aa')$ et $R^{A_2} := \mathrm{acl}_0(R^{A_1}aa')$.

On voit que $A_1 \leq A_2$ est une extension première, car $\delta(A_2/A_1) = 0$ et $\delta(\mathrm{acl}_0(A_1a_2)/A_1) = 1$ pour tout $a_2 \in \mathrm{acl}_0(Baa') \setminus B = A_2 \setminus A_1$ (car T_0 est triviale). En utilisant la trivialité de T_0, on vérifie que si $B \subsetneq \tilde{A} \subsetneq A_2$ et $\tilde{A} = \mathrm{cl}_0(\tilde{A})$, alors $\tilde{A} = A_1$. Puis, on continue en construisant une extension première $A_2 \leq A_3$ telle que si $A_1 \subsetneq \tilde{A} \subsetneq A_3$ et $\tilde{A} = \mathrm{cl}_0(\tilde{A})$, alors $\tilde{A} = A_2$. Ainsi, on obtient une chaîne d'extensions premières

$$A_0 := B \leq A_1 \leq \ldots \leq A_m$$

telle que si $A_0 \subseteq \tilde{A} = \mathrm{cl}_0(\tilde{A}) \subseteq A_m$, alors $\tilde{A} = A_i$ pour un $i \in \{0, \ldots, m\}$. Pour $a_m \in A_m \setminus A_{m-1}$ rouge (d'ailleurs, tout élément de $A_m \setminus B$ est rouge par trivialité de T_0) on a donc nécessairement $\mathrm{cl}_0(Ba_m) = A_m$, ce qui donne les propriétés requises dans (1).

Quant à (2), considérons $B' \leq B = \mathrm{acl}_0(B'r)$ pour $r \models \mathfrak{g}_r|B'$. On raisonne comme dans la preuve de la Proposition 4.2.20 (l'argument qui donne $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) \geq 2$) pour construire une extension première $B \leq A_1$ telle que $\mathrm{d}(a_1/B') > 0$ pour tout $a_1 \in A_1 \setminus B'$. Il n'est pas difficile de voir que $\mathrm{d}(a/B') = 1$ pour tout $a \in A_m \setminus B'$, où $A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A_m$ est la construction ci-dessus. En particulier, on a $\mathrm{d}(a_m/B') = 1$ pour $a_m \in A_m \setminus A_{m-1}$. Cela montre (2).

Finalement, (3) est une conséquence de (2). □

Corollaire 4.2.24. *Supposons T_0 triviale et T_1 non-triviale. Alors, on a :*

(1) Toute extension générique rouge est approximée par des extensions parasites.

(2) La théorie T_ω est axiomatisée par $T'_\omega(1,2,3)$ (voir page 113).

Preuve. Soit $k = \mathrm{cl}_\omega(k)$ et $m \in \mathbb{N}$. On peut supposer que $\mathrm{d}_1(k) \gg 0$. On choisit a_m comme dans le Lemme 4.2.23(1), pour $B := k$. Alors, $l_m := \mathrm{cl}_\omega(ka_m)$ est une extension parasite de k, avec $ka_m \leq_{2m-1} K^*$, car $\mathrm{d}_0(\mathrm{cl}_0(ka_m)/k) \geq 2m$. (On rappelle que $B \leq_n A$ si et seulement si $\delta(\overline{a}/B) \geq 0$ pour tout uplet $\overline{a} \in A$ de longueur au plus n.) Comme $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(a_m/k) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(r/k)$, où $r \models \mathfrak{g}_r|k$, cela montre que $\mathfrak{g}_r|k$ est approximé par les types $\mathrm{tp}_\omega(a_m/k)$, d'où (1).

Quant à (2), il suffit de montrer que tout modèle ω-saturé $K' \models T'_\omega(1,2,3)$ est riche pour la classe $(\mathcal{C}_0, \leq)$. Or, pour $k \leq l$ primitive dans $\mathcal{C}_0$ et $k \leq K'$, un k-plongement (fort) de l dans K' existe par les axiomes (1,2,3). Cela est également vrai dans le cas d'une extension parasite l/k. Puis, par (1) et ω-saturation de K', on peut traiter le cas où l/k est générique rouge. Finalement, par le Lemme 4.2.21, on sait qu'il suffit de plonger une tour de deux extensions génériques rouges pour traiter le cas d'une extension générique blanche aussi. □

Exemples 4.2.25. (1) $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q} \subseteq T_1 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_{q^2}}$, où on nomme dans $\mathcal{L}_1$ le modèle premier de T_1 par des constantes. Comme $\mathrm{d}_0(\overline{a}/B) \leq 2\,\mathrm{d}_1(\overline{a}/B)$ si $B = \mathrm{acl}_1(B)$, on a $\mathrm{acl}_1 = \mathrm{cl}_\omega$, et toute extension première est de longueur 2. On peut vérifier alors à la main que $\mathrm{RM}(\mathfrak{g}_r) = \mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) = 2$ et $\mathrm{RM}(\mathfrak{g}_b) = \mathrm{U}(\mathfrak{g}_b) = 3$.

(2) $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$ comme dans (1), puis, pour un corps (gauche) infini $F_1 \supseteq \mathbb{F}_q$, soit $T_1 = \mathrm{EV}_{F_1}$ avec un modèle premier de T_1 nommé par des constantes. Comme $\mathfrak{g}_b$ est stabilisé par tout élément de $K^* \models T_\omega$ (cela se montre par un δ-calcul), $\mathfrak{g}_b$ est le type générique de notre groupe (et c'est le seul). Nous allons montrer qu'il existe une chaîne infinie $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes définissables de K^*, telle que $[H_{i+1} : H_i] = \infty$ pour tout i. Il suit

que $\mathrm{U}(H_{i+1}) > \mathrm{U}(H_i)$ pour tout i, d'où $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_b) \geq \omega$, et enfin $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) = \omega$, $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_b) = \omega \cdot 2$ par 4.2.20(2).

Pour construire cette suite, il suffit de montrer que si $V \subsetneq V'$ sont des $\mathbb{F}_q$-sous-espaces vectoriels finis de F_1, alors le groupe (définissable) $V \cdot R := \{v \cdot r \mid v \in V, r \in R\}$ est un sous-groupe d'indice infini dans $V' \cdot R$. En effet, comme F_1 est infini, il contient une chaîne infinie strictement croissante $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{F}_q$-sous-espaces vectoriels finis. Posant $H_i := V_i \cdot R$ nous donnera le résultat.

Soient donc $V \subsetneq V'$ des $\mathbb{F}_q$-sous-espaces vectoriels finis de F_1. Pour simplifier l'exposition nous supposerons que $1 \in V' \setminus V$ (on peut toujours se ramener à ce cas, en considérant $cV \subsetneq cV'$ pour $c^{-1} \in V' \setminus V$). Donc $\mathbb{F}_q \subseteq V'$ et $\mathbb{F}_q \cap V = (0)$.

Si $[V' \cdot R : V \cdot R]$ était fini, on trouverait un $\mathbb{F}_q$-sous-espace vectoriel $A \subseteq K^*$ fini (engendré par $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in K^*$) tel que $V' \cdot R \subseteq V \cdot R + A$. Soient $k := \mathrm{cl}_\omega(\overline{a})$ et $r' \models \mathfrak{g}_r|k$, donc $r' = 1 \cdot r' \in V' \cdot R$. Comme $r' \in V \cdot R + A$, il existe $a \in A \subseteq k$, $\lambda \in V \setminus \{0\}$ et $r \in R$ tels que $r' = a + \lambda \cdot r$. Comme $r' \notin k$ et k est un F_1-espace vectoriel, nous avons $F_1 r' \cap k = F_1 r \cap k = (0)$. En particulier,

$$\mathrm{acl}_0(r, \lambda \cdot r) \cap k = (0).$$

Par modularité de T_0 et puisque $\lambda \notin \mathbb{F}_q$, nous obtenons

$$2 = \mathrm{d}_0(r, \lambda \cdot r/\emptyset) = \mathrm{d}_0(r, \lambda \cdot r/k) = \mathrm{d}_0(r, r'/k).$$

On en déduit que $\delta(r, r'/k) = 0$, en contradiction avec $\mathrm{d}(r/k) = 1$.

(3) Soient T_0 la théorie d'un ensemble infini sans structure et $T_1 = ACF_p$ pour $p = 0$ ou premier. C'est le contexte des corps noirs de Poizat [Po99]. Par la Proposition 4.2.20(2.I), on a $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_b) = \mathrm{RM}(\mathfrak{g}_b) = \omega \cdot 2$ et $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_r) = \mathrm{RM}(\mathfrak{g}_r) = \omega$, ce qui était déjà montré dans [Po99].

(4) Soient $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_p} \subseteq T_1 = ACF_p$ pour p premier. C'est le contexte des corps rouges de Poizat en caractéristique positive. Dans [Po01], il est montré qu'on est dans le cas (2.I), ce qu'on peut aussi montrer par une variation de la preuve donnée dans l'exemple (2).

Avant de discuter le collapse dans un contexte bicolore fortement minimal, nous adaptons les résultats de la Section 3.2 au cadre actuel.

Définition 4.2.26. Dans le contexte bicolore, un *type admissible* est donné par (la classe de parallélisme de) $\mathrm{tp}(\overline{a}/k)$, où $k \leq K^* \models T_\omega$ et $\overline{a}$ est une $\mathcal{L}_0$-base rouge d'une extension première $k \leq A$.

Pour les mêmes raisons que dans la fusion libre, on peut réduire les questions de non-orthogonalité des types qui sont orthogonaux aux génériques aux types admissibles : tout type admissible est fortement minimal (Théorème 4.2.19) ; par le Lemme de décomposition 4.2.7, tout type réel et orthogonal aux types génériques est analysable par des types admissibles, et si de plus un tel type p est fortement minimal, il existe un type admissible non presque orthogonal à p.

Soit (T_0, T_1) un contexte bicolore fortement minimal. On dit qu'on est dans le *cas noir* si T_0 est la théorie d'un ensemble infini sans structure, et dans le *cas rouge* si T_0 est "essentiellement" la théorie $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$ (voir 4.2.28 ci-dessous). Le Lemme 3.2.3 s'adapte parfaitement au contexte bicolore fortement minimal. Notons que par modularité de T_0, si un uplet rouge $\overline{b}$ est $\mathcal{L}_0$-algébrique au-dessus de $k\overline{a}$, avec $\overline{a}$ rouge, alors $\overline{b} \in \mathrm{acl}_0(R^k\overline{a})$.

Lemme 4.2.27. *Soient $p, q \in S(k)$ admissibles ($k = \mathrm{cl}_\omega(k)$). Sont équivalents :*

(1) $p \not\perp_k^a q$,

(2) Il existe $\overline{a} \models p$ et $\overline{b} \models q$ tels que $\overline{a}$ et $\overline{b}$ sont inter-$\mathcal{L}_0$-algébriques au-dessus de k (de manière équivalente : inter-$\mathcal{L}_0$-algébriques au-dessus de R^k).

En particulier, si $p \not\perp q$, alors p et q ont la même longueur (disons n), et :

(N) Dans le cas noir, $p \not\perp_k^a q$ si et seulement si $q = \sigma(p)$ pour un $\sigma \in S_n$.

(R) Si T_0 est une expansion inessentielle et ω-catégorique de la théorie d'un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel (le cas rouge), alors $p \not\perp_k^a q$ si et seulement si $q = \Gamma \cdot p + \overline{b}$, pour un $\Gamma \in GL_n(\mathbb{F}_q)$ et un n-uplet $\overline{b} \in R^k$. □

Le cas noir étant inintéressant (et facile) en ce qui concerne $\perp$ et $\perp^{(a)}$, et avec les réductions futures en tête, nous nous restreignons au cas rouge dans la suite.

Convention 4.2.28. À partir de maintenant et jusqu'à la fin de la Sous-section 4.2.2, on suppose que l'on se trouve dans le cas rouge, où T_0 est une expansion inessentielle et ω-catégorique de $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$.

Pour $p \in S^n(k)$ admissible, on définit Δp ainsi que $\mathrm{Tstab}_\Gamma(p)$ (pour $\Gamma \in Gl_n(\mathbb{F}_q)$) comme dans la fusion libre, c'est à dire $\Delta p := \mathrm{tp}_\omega(\overline{a}_1 - \overline{a}_2/k)$, où $(\overline{a}_1, \overline{a}_2) \models p^{(2)}|k$, et

$$\mathrm{Tstab}_\Gamma(p) := \{\overline{c} \mid \text{ Pour } \overline{a} \models p|k\overline{c} \text{ on a } \overline{a}' := \Gamma \cdot \overline{a} + \overline{c} \models p|k\overline{c}\}.$$

Avec ces définitions, le Lemme 3.2.8 ainsi que le Fait 3.2.9 restent vrais, et cela sans changement. En particulier, si p est localement projectif, p est le type générique d'une cosette définissable de $\mathrm{stab}(p)$ (un groupe fortement minimal), et Δp est un type admissible (c'est le générique de $\mathrm{stab}(p)$).

Le type de la prégéométrie d'un type admissible se voit aisément. En effet, on montre qu'un type admissible $p \in S^n(k)$ est un cosette type si et seulement si $p\restriction_{\mathcal{L}_1}$ est un cosette type (la preuve suit les mêmes lignes que 3.2.10), ce qui établit le résultat suivant :

Lemme 4.2.29. *Soit p admissible et $p_1 := p\restriction_{\mathcal{L}_1}$. Alors, p est non-trivial si et seulement si p_1 est un cosette type.* □

On utilise les Lemmes 4.2.29 et 3.2.7 pour montrer l'analogue du Théorème 3.2.13 dans le contexte bicolore (nous notons que la Proposition 4.2.30 est même vraie dans tout contexte bicolore fortement minimal, non seulement dans le cas rouge) :

Proposition 4.2.30. *Supposons que T_1 a la DMP. Alors il existe une suite $(\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{z}_i), \theta_i(\overline{z}_i))_{i\in\mathbb{N}}$, où φ_i et θ_i sont des $\mathcal{L}$-formules sans paramètres, avec les propriétés suivantes :*

(I) Pour tout i et tout $\overline{b} \models \theta_i(\overline{z}_i)$, la formule $\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b})$ est fortement minimale et localement finie.

*(II) (*Uniformité du type de géométrie*) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, si $\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b})$ a une prégéométrie triviale (localement projective) pour un $\overline{b} \models \theta_i(\overline{z}_i)$, alors $\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b}')$ a une prégéométrie triviale (respectivement : localement projective) pour tout $\overline{b}' \models \theta_i(\overline{z}_i)$.*

*(III) (*Définissabilité de l'orthogonalité*) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ il existe une $\mathcal{L}$-formule $\chi_i(\overline{z}_i, \overline{z}'_i)$ telle que pour tout $\overline{b}, \overline{b}'$ avec $\models \theta_i(\overline{b}) \wedge \theta_i(\overline{b}')$ on ait $\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b}) \not\perp \varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b}')$ si et seulement si $\models \chi_i(\overline{b}, \overline{b}')$.*

De plus, pour tout $i \neq j$ et tout $(\overline{b}, \overline{b}')$ avec $\models \theta_i(\overline{b}) \wedge \theta_j(\overline{b}')$ on a $\varphi_i(\overline{x}_i, \overline{b}) \perp \varphi_j(\overline{x}_j, \overline{b}')$.

*(IV) (*Coordinatisation du monde parasite*) Si $p := \mathrm{tp}_\omega(\overline{a}/B)$ est un type parasite, alors il existe $\bar{\alpha}_0, \ldots \bar{\alpha}_m \in \mathrm{cl}_\omega(B\overline{a})$ avec $\overline{a} \in \mathrm{cl}_\omega(B\bar{\alpha}_o, \ldots, \bar{\alpha}_m)$ tels que, posant $B_i := B\bar{\alpha}_0 \ldots \bar{\alpha}_{i-1}$ pour $i = 0, \ldots m$, on a ou bien $\bar{\alpha}_i \in \mathrm{cl}_\omega(B_i)$ ou bien $\mathrm{tp}_\omega(\bar{\alpha}_i/B_i)$ est générique dans $\varphi_j(\overline{x}, \overline{b})$ pour un $j \in \mathbb{N}$ et $\overline{b} \in B_i$.*

Comme dans la fusion au-dessus d'un sous-langage, ce résultat (en fait une version légèrement plus forte de ce résultat) devait être le point de départ d'une stratégie de collapse dans le contexte bicolore (voir [HH06, Appendix B] pour des détails).

Cependant, il ne nous était pas possible de surmonter une difficulté combinatoire liée au lemme d'amalgamation dans une classe restreinte de structures bicolores, définie à l'aide d'une coordinatisation dans le style de 4.2.30. Comme dans la fusion au-dessus d'un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel, la notion d'une *suite aux différences* est l'outil crucial pour résoudre ces difficultés combinatoires. Ainsi, Baudisch, Martin-Pizarro et Ziegler obtiennent dans [BMZ05b] le collapse des corps rouges, de manière complètement analogue au collapse dans le cas de la fusion au-dessus d'un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel.

Nous discutererons à la fin de la Sous-section 4.2.3 comment on peut utiliser leur résultat pour montrer un collapse dans un cadre plus général même. Tout d'abord, nous traitons un contexte bien particulier, dans lequel nous obtenons un collapse indépendamment de [BMZ05b]. Pour mettre ce cas particulier dans un contexte général, nous utiliserons les *enveloppes affines admissibles* définies exactement comme dans la fusion libre (cf. 3.3.16).

Remarque 4.2.31. *Le Lemme 3.3.15 est vrai dans notre contexte bicolore sans changement. En particulier, travaillant dans la sorte des réels, on rentre dans le cadre de 3.3.1 en prenant pour Σ la famille des types parasites, et pour Σ_0 la famille des types admissibles.*

Par conséquent, le Lemme 3.3.17 est vrai dans le contexte bicolore :

(1) (Existence) Pour tout ensemble $A \subseteq K \models T_\omega$, il existe $A \subseteq E \subseteq K$, tel que E soit une enveloppe affine admissible de A.

(2) *Soit E une enveloppe affine admissible pour A, et soit $A \subseteq B \subseteq E$. Alors E est une enveloppe affine admissible pour B. De plus, tout type admissible $p \in S(B)$ qui est réalisé dans E est non-modulaire.*

(3) *(Homogénéité) Soient $A \subseteq B_i \subseteq E_i$ pour $i = 1, 2$, où E_1 et E_2 sont deux enveloppes affines admissibles de A. Puis, soit $f : B_1 \to B_2$ une application $\mathcal{L}(A)$-élémentaire. Alors f s'étend en une application $\mathcal{L}$-élémentaire $\tilde{f}$ de E_1 sur E_2.*

(4) *Soit (G, X) un espace homogène (réel) définissable au-dessus de A, tel que le type générique de X soit parasite. Puis, soit E une enveloppe affine admissible de A. Alors X a un point dans E.* □

Définition-Proposition 4.2.32. Soit $\mathcal{E} \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_0$ la classe des structures bicolores telle que si $L \leq K^* \models T_\omega$, alors $L \in \mathcal{E}$ si et seulement si tout type admissible au-dessus de L est modulaire.

Alors, $\mathcal{E}$ est une classe élémentaire.

Preuve. On peut refaire plus ou moins la preuve de 3.3.19, grâce au Lemme 4.2.29. Pour simplifier, on suppose dans la preuve que T_1 a la DMP (le résultat est vrai sans cette hypothèse). On indique brièvement les changements qu'il faut faire dans la preuve de 3.3.19.

On considère un type admissible projectif $q = \Delta q \in S^n(k)$, et on pose $q_1 := q \restriction_{\mathcal{L}_1}$. Puis, on choisit des $\mathcal{L}_1$-formules $\varphi_1(\overline{x}, \overline{z})$, $\theta_1(\overline{z})$ et $G_1(\overline{x}, \overline{z})$ telles que si l'on pose $\varphi(\overline{x}, \overline{z}) := \varphi_1(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \bigwedge_{i=1}^n R(x_i)$, les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) Si $\overline{b}' \models \theta_1(\overline{z})$, alors $\varphi_1(\overline{x}, \overline{b}')$ est non-vide de degré de Morley 1, et le stabilisateur du type $\mathcal{L}_1$-générique de $\varphi_1(\overline{x}, \overline{b}')$ est donné par $G_1(\overline{x}, \overline{b}')$.

(ii) Pour tout $\overline{b}' \models \theta_1(\overline{z})$, la formule $\varphi(\overline{x}, \overline{b}')$ est fortement minimale, et son unique type générique $q_{\overline{b}'}$ est admissible. De plus, $q_{\overline{b}'} \restriction_{\mathcal{L}_1}$ est le type générique de $\varphi_1(\overline{x}, \overline{b}')$.

(iii) q est codé par (φ, θ_1), c'est à dire il existe $\overline{b} \models \theta_1$ tel que $q|K^* = q_{\overline{b}}|K^*$.

(iv) Si $\models \theta_1(\overline{b}')$, alors $\mathrm{RM}_{T_1}(\varphi_1(\overline{x}, \overline{b}') \Delta G_1(\overline{x}, \overline{b}')) < \mathrm{RM}_{T_1}(\varphi_1(\overline{x}, \overline{b}'))$, c'est à dire $\varphi_1(\overline{x}, \overline{b}')$ et $G_1(\overline{x}, \overline{b}')$ coïncident génériquement.

Pour tout $(\varphi_1, \theta_1, G_1)$ satisfaisant (i–iv) ci-dessus, on met l'axiome

(ϵ) $\forall \overline{z} \forall \overline{y} \exists \overline{x} \{\theta_1(\overline{z}) \to G_1(\overline{x} - \overline{y}) \wedge \bigwedge_{i=1}^n R(x_i)\}$.

À partir de là, on peut continuer la preuve comme dans 3.3.19, montrant que tous les axiomes de la forme (ϵ) donnent une axiomatisation de la classe $\mathcal{E}$. □

Le résultat suivant se montre comme dans la fusion libre (on combine 3.2.19 et 3.2.21).

Lemme 4.2.33. *Dans un contexte bicolore (fortement minimal, cas rouge), sont équivalents :*

(i) *T_ω est monobasée.*

(ii) *T_1 est monobasée.*

Si les conditions équivalentes (i) et (ii) sont satisfaites, on dit qu'on est dans le contexte bicolore abélien, *et on a alors :*

(1) T_ω est non-multidimensionnelle.

(2) Aucun type admissible dans T_ω n'est trivial. □

4.2.3 Résultats de collapse

Dans cette sous-section, nous regroupons des résultats de collapse que l'on peut obtenir dans le contexte bicolore fortement minimal. Comme dans la fusion libre, nous traitons d'abord le contexte bicolore abélien, un cas bien plus élémentaire que le cas général, car T_ω est alors une théorie dimensionnelle par 4.2.33.

Supposons donc que T_0 est une expansion inessentielle et ω-catégorique de $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$, et que $T_1 \supseteq T_0$ est une expansion fortement minimale monobasée. Les autres hypothèses de la Sous-section 4.2.2 restent en vigueur ($\mathrm{acl}_1(\emptyset)$ est infini et $T_0 \subseteq T_1$ renforce la prégéométrie). De plus, pour faciliter l'exposition, on suppose que $\mathrm{dcl}_i(\emptyset) = \mathrm{acl}_i(\emptyset)$ pour $i = 0, 1$ (il suffit d'ajouter quelques constantes).

Soit $p = \Delta p$ un type admissible dans T_ω. Donc, $p = p(x_1, \ldots, x_{n_p})$ est basé sur $\emptyset$ et, par le Lemme 4.2.29, $p_1 := p\restriction_{\mathcal{L}_1}$ est le type générique d'un sous-groupe $\mathcal{L}_1(\emptyset)$-définissable connexe G_1 de $(V_0, +)^{n_p}$, où $(V_0, +)$ est le groupe additif du $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel $\mathcal{L}_0$-définissable sous-jacent. Le groupe $G_1 \cap R^{n_p}$ est alors fortement minimal (et localement fini) avec type générique p, et on peut isoler $p(\overline{x})$ par la $\mathcal{L}$-formule sans quanteurs

$$G_1(\overline{x}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n_p} R(x_i) \wedge \ulcorner \mathrm{d}_0(\overline{x}) = n_p \urcorner.$$

Soit $\mathcal{D}'$ la classe des types admissibles de cette forme ($\mathcal{D}'$ est borné, car tous ces éléments sont sur $\emptyset$).

Comme il s'agit de génériques de groupes, on a $p \not\perp q$ pour $p, q \in \mathcal{D}'$ si et seulement si $p = \Gamma \cdot q$ pour un $\Gamma \in GL_{n_p}(\mathbb{F}_q)$. Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$ un système de représentants des classes de non-orthogonalité dans $\mathcal{D}'$. Puis, on considère une fonction

$$\mu : \mathcal{D} \to \mathbb{N},$$

et on pose

$$\tilde{\mathcal{C}}_0^\mu := \{M \in \tilde{\mathcal{C}}_0 \mid \dim_M(p) \leq \mu(p) \text{ pour tout } p \in \mathcal{D}\}.$$

Rappelons que dans le contexte de fusion abélien, nous avons d'abord considéré des fonctions $\mu : \mathcal{D} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et c'était uniquement pour obtenir une théorie fortement minimale qu'il fallait que la fonction μ soit à valeurs dans $\mathbb{N}$. Nous pourrions faire la même chose ici, mais pour simplifier l'exposition, nous nous restreignons cette fois-ci dès le départ aux fonctions μ à valeurs dans $\mathbb{N}$. La classe $\tilde{\mathcal{C}}_0^\mu$ est élémentaire, et nous posons $\mathcal{C}_0^\mu := \tilde{\mathcal{C}}_0^\mu \cap \mathcal{C}_0$.

Nous procédons comme dans le collapse dans le contexte de fusion abélien, dans la mesure où nous construisons directement une structure bicolore $M^\mu \in$

$\tilde{\mathcal{C}}_0^\mu$, telle que l'âge fort de M^μ soit égal à $\mathcal{C}_0^\mu$ et telle que M^μ soit riche pour la classe $(\mathcal{C}_0^\mu, \leq)$.

Nous travaillons dans une structure bicolore M^* qui est un modèle ω-saturé de T_ω, et nous construisons M^μ comme sous-structure autosuffisante de M^*. Dans M^*, on choisit :

– pour tout $p \in \mathcal{D}$: une suite de Morley $(\overline{b}_i^p)_{0 \leq i < \mu(p)}$ dans p, puis $B_p := \bigcup_{i<\mu(p)} \overline{b}_i^p$,
– une suite de Morley $(b_i^{\mathfrak{g}_r})_{i<\omega}$ dans $\mathfrak{g}_r$, puis $B_{\mathfrak{g}_r}$, l'ensemble de tous ces $b_i^{\mathfrak{g}_r}$.

Comme les types dans $\mathcal{D} \cup \{\mathfrak{g}_r\}$ sont 2 à 2 orthogonaux, les composantes de toutes ces suites forment un système indépendant, c'est à dire

$$\bigcup_{q \in \mathcal{D} \cup \{\mathfrak{g}_r\}} B_q \models \Big(\bigotimes_{p \in \mathcal{D}} p^{(\mu(p))}\Big) \otimes \bigotimes \mathfrak{g}_r^{(\omega)}.$$

Soit $B := \mathrm{cl}_\omega(\bigcup_{q \in \mathcal{D} \cup \{\mathfrak{g}_r\}} B_q)$, et soit finalement $M^\mu \leq M^*$ une enveloppe affine admissible de B.

Lemme 4.2.34. *Avec les notations ci-dessus, on a :*

(1) $M^\mu \in \tilde{\mathcal{C}}_0^\mu$ *; plus précisément, pour* $p \in \mathcal{D}$ *on a* $\dim_{M^\mu}(p) = \mu(p)$. *De plus,* $\mathrm{d}(M^\mu) = \aleph_0$.

(2) Soit $k \leq M^\mu$ *et* $k \leq l \in \mathcal{C}_0^\mu$. *Alors il existe un* k*-plongement fort de* l *dans* M^μ.

*(3) L'*âge fort de M^μ*, c'est à dire l'ensemble des structures bicolores finiment engendrées et autosuffisantes dans* M^μ*, est égale à* $\mathcal{C}_0^\mu$.

(4) La classe $(\mathcal{C}_0^\mu, \leq)$ *a la propriété d'amalgamation et est connexe, et* M^μ *est la limite de Fraïssé de* $(\mathcal{C}_0^\mu, \leq)$.

Preuve. La preuve de (1),(3) et (4) se fait comme celle de 3.4.2. La démonstration de (2) est plus compliquée ici, et nous la donnons. Soient $k \leq l \in \mathcal{C}_0^\mu$ et $k \leq M^\mu$. Les cas l/k primitive ou générique rouge se font comme dans la preuve de 3.4.2, et c'est donc une extension générique blanche que nous devons considérer, c'est à dire le cas où $l = \mathrm{acl}_1(kb)$ pour un $b \in l$ avec $\mathrm{d}(b/k) = 2$. Pour k-plonger fortement l dans M^μ, il suffit de trouver $b' \in M^\mu$ avec $b' \models \mathfrak{g}_b|k$. Or, on peut supposer que $\mathrm{d}_1(k) >> 0$, quitte à remplacer k par k' telle que $k \leq k' \leq M^\mu$, où k'/k est une tour suffisamment large d'extensions génériques rouges, et il existe donc un $b' \in M^\mu$ avec $b' \models \mathfrak{g}_b|k'$, par le Lemme 4.2.21. A fortiori, $b' \models \mathfrak{g}_b|k$. □

Soit $T^\mu := \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(M^\mu)$. Puis, soit T'^μ la $\mathcal{L}$-théorie suivante :

$T'^\mu(1)$: $\mathrm{Th}(\tilde{\mathcal{C}}_0)$

$T'^\mu(2)$: $\dim(p) = \mu(p)$ pour tout $p \in \mathcal{D}$

$T'^\mu(3)$: Une structure bicolore L est modèle de $T'^\mu(3)$ si et seulement si $L \in \mathcal{E}$.

$T'^{\mu}(4)$: Soit $\varphi_1(x, \overline{z})$ une $\mathcal{L}_1$-formule et $\chi_{\varphi_1}(\overline{z}) := \exists^\infty x \varphi_1(x, \overline{z})$. Puis, soit $\tau(x, \overline{z})$ une $\mathcal{L}$-formule existentielle à quantification bornée, telle que $K \models \tau(a, \overline{b})$ implique $\mathrm{d}(a/\overline{b}) = 0$. Pour φ_1 et τ, on met l'axiome

$$\forall \overline{z} \exists x [\chi_{\varphi_1}(\overline{z}) \rightarrow x \in R \wedge \varphi_1(x, \overline{z}) \wedge \neg \tau(x, \overline{z})].$$

Notons que $T'^{\mu}(3)$ est de premier ordre par 4.2.32.

Les résultats contenus dans le lemme suivant se montrent comme leurs analogues dans le contexte de fusion abélien (cf. 3.4.3, 3.4.4 et 3.4.6).

Lemme 4.2.35. *(1) Les structures bicolores dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^{\mu}$ qui sont riches pour $(\mathcal{C}_0^{\mu}, \leq)$ sont précisément les modèles ω-saturés de T'^{μ}. En particulier, $T'^{\mu} = T^{\mu}$, et c'est une théorie complète.*

(2) Pour $i = 1, 2$, soient $A_i \leq M_i \models T^{\mu}$. Alors, $\mathrm{tp}_{T^{\mu}}(A_1) = \mathrm{tp}_{T^{\mu}}(A_2)$ *si et seulement si* $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(A_1) = \mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(A_2)$.

(3) Dans T^{μ}, la clôture algébrique est donnée par cl_{d}. □

Théorème 4.2.36. *La théorie T^{μ} est complète et presque fortement minimale (donc $\aleph_1$-catégorique). De plus, on a :*

(1) Le prédicat R définit un ensemble fortement minimal dans T^{μ}.

(2) Pour tout $\overline{a}, B \subseteq M' \models T^{\mu}$ on a

$$\mathrm{RM}(\overline{a}/B) = \mathrm{U}(\overline{a}/B) = \mathrm{d}(\overline{a}/B).$$

En particulier, $\mathrm{RDM}(T^{\mu}) = (2, 1)$ *avec $\mathfrak{g}_b$ comme unique type générique.*

Preuve. Dans le Lemme 4.2.40 ci-dessous, nous donnerons une preuve abstraite incorporant le Théorème 4.2.36. □

Remarque 4.2.37. *Dans un contexte bicolore abélien ainsi que dans un contexte de fusion abélien, nos preuves de collapse ne dépendent pas du fait que les langages $\mathcal{L}_i$ soient dénombrables. Les résultats de collapse correspondants (le Théorème 3.4.7 ainsi que le Théorème 4.2.36) restent alors vrais pour des $\mathcal{L}_i$ arbitraires.*

Nous donnons maintenant une formalisation de la notion de collapse dans le contexte bicolore fortement minimal, afin d'aborder le problème d'existence d'un collapse dans un contexte bicolore quelconque.

Définition 4.2.38. Soit (T_0, T_1) un contexte bicolore fortement minimal. Un *collapse* pour (T_0, T_1) est la donnée d'une classe élémentaire (non-vide) de $\mathcal{L}$-structures $\tilde{\mathcal{C}}_0^c \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_0$ qui satisfait aux propriétés suivantes :

(i) $\tilde{\mathcal{C}}_0^c$ est "clos par sous-structure bicolore", c'est à dire si $K \subseteq L \in \tilde{\mathcal{C}}_0^c$ pour une structure bicolore $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, alors $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0^c$.

(ii) Si $k \leq K \in \tilde{\mathcal{C}}_0^c$, et $k \leq l \in \mathcal{C}_0$ est une extension primitive, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $l^{(n)}$ ne se k-plonge pas dans K, où $l^{(n)} := \underbrace{l \otimes_k l \ldots l \otimes_k l}_{n \text{ fois}}$.

(iii) $(\tilde{\mathcal{C}}_0^c, \leq)$ a la propriété d'amalgamation (la propriété du plongement commun en découle par (i)).

(iv) Si T^c est la $\mathcal{L}$-théorie des structures bicolores dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^c$ qui sont riches pour la classe $(\mathcal{C}_0^c, \leq)$, alors tout modèle ω-saturé de T^c est riche pour $(\mathcal{C}_0^c, \leq)$. Ici, $\mathcal{C}_0^c$ dénote la classe des structures bicolores finiment engendrées qui sont dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^c$.

(v) Soient $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0^c$ et L/K une extension générique rouge ou générique blanche. Alors $L \in \tilde{\mathcal{C}}_0^c$.

Si $\bar{b}$ est un uplet fini de paramètres et $(\mathcal{C}^c, \leq)$ un collapse pour le contexte bicolore $(T_0(\bar{b}), T_1(\bar{b}))$, on dira également que $(\mathcal{C}^c, \leq)$ est un collapse pour (T_0, T_1).

La définition (abstraite) d'un collapse dans le contexte bicolore est presque la même que dans le cas de la fusion (cf. la Définition 3.5.1). Néanmoins, il faut ajouter la propriété (v) qui garantit que dans un modèle ω-saturé de la théorie collapsée T^c, au-dessus de tout ensemble de paramètres fini, les génériques rouges et blanc soient réalisés. Dans la fusion, la propriété analogue était une conséquence de (i-iv).

Remarque 4.2.39. *Dans le contexte bicolore abélien, la classe $(\tilde{\mathcal{C}}_0^\mu \leq)$ est un collapse au sens de 4.2.38.*

Preuve. Il suffit de combiner 4.2.34 et 4.2.35. □

Lemme 4.2.40. *Soit $\tilde{\mathcal{C}}_0^c$ un collapse pour le contexte bicolore fortement minimal (T_0, T_1) (au sens de 4.2.38). Puis, soit T^c la $\mathcal{L}$-théorie des structures bicolores riches dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^c$ pour la classe $(\mathcal{C}_0^c, \leq)$. Alors T^c est complète, et pour $M^c \models T^c$ on a :*

(1) Si $\bar{a} \leq M^c$, alors $\mathrm{tp}_{T^c}(\bar{a})$ est déterminé par $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\bar{a})$.

(2) Pour $A \subseteq M^c$ on a $\mathrm{acl}_{T^c}(A) = \mathrm{cl}_{\mathrm{d}}(A)$.

(3) Le prédicat R définit un ensemble fortement minimal dans T^c.

(4a) Si T_1 est triviale, T^c est de rang de Morley ≤ 2 et deux-dimensionnelle ; les classes de non-orthogonalité de types réguliers sont données par $\mathfrak{g}_r$ et $\mathfrak{g}_b$.

(4b) Si T_1 n'est pas triviale, T^c est presque fortement minimale (donc $\aleph_1$-catégorique), et pour tout $\bar{a}, B \subseteq M^c$ on a

$$\mathrm{RM}(\bar{a}/B) = \mathrm{U}(\bar{a}/B) = \mathrm{d}(\bar{a}/B).$$

En particulier, $\mathrm{RDM}(T^c) = (2, 1)$ avec $\mathfrak{g}_b$ comme unique type générique.

Preuve. C'est similaire à 3.5.2, mais un peu plus compliqué. D'abord, (1) est une conséquence plus ou moins directe de (iii) et (iv). Quant à (2), $\mathrm{acl}_{T^c}(A) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathrm{d}}(A)$ suit de (ii) et (1), tandis que (v) et (1) entraînent $\mathrm{cl}_{\mathrm{d}}(A) \subseteq \mathrm{acl}_{T^c}(A)$.

Puis, pour montrer (3), soit $r \in M' \succcurlyeq M^c$ un élément rouge quelconque. Si $\mathrm{d}(r/M^c) = 0$, alors $r \in M^c$ par (2). Sinon, r est générique rouge au-dessus de

M^c. Or, dans T^c il y a un seul type d'élément générique rouge par (1), ce qui montre (3).

La partie (4a) est facile. Montrons enfin (4b). Si T_1 n'est pas triviale, et si $\overline{a}$ est un uplet fini tel que pour $k = \mathrm{cl}_\omega(\overline{a})$ on a $\mathrm{d}_1(k) \gg 0$, alors pour toute paire $(r_1, r_2) \models \mathfrak{g}_r^{(2)}|k$ il existe $b \in \mathrm{acl}_1(kr_1r_2)$ tel que b soit générique blanc au-dessus de k, par 4.2.21.

Montrons que $\mathrm{acl}_{T^c}(\overline{a}R^{M^c}) = M^c$. Soit $\alpha \in M^c$ quelconque. Si $\mathrm{d}(\alpha/k) \leq 1$, il est facile de voir que $\alpha \in \mathrm{acl}_{T^c}(\overline{a}R^{M^c})$, en utilisant (2). Considérons α tel que $\mathrm{d}(\alpha/k) = 2$, et soient r_1, r_2 et b comme dans le paragraphe précédent. Alors, $\mathrm{tp}_{T^c}(\alpha/k) = \mathrm{tp}_{T^c}(b/k)$ et $b \in \mathrm{acl}_{T^c}(kr_1r_2) = \mathrm{acl}_{T^c}(\overline{a}r_1r_2)$. On en déduit qu'il existe également r_1', r_2' rouges tels que $\alpha \in \mathrm{acl}_{T^c}(\overline{a}r_1'r_2')$, montrant $\mathrm{acl}_{T^c}(\overline{a}R^{M^c}) = M^c$.

La théorie T^c est donc presque fortement minimale et en particulier $\aleph_1$-catégorique.

Pour montrer $\mathrm{d}(\overline{a}/B) = \mathrm{U}(\overline{a}/B) = \mathrm{RM}(\overline{a}/B)$ pour tout uplet fini $\overline{a}$ et tout $B \subseteq M^c$, il suffit de montrer que $\mathrm{d}(a/B) = \mathrm{U}(a/B)$ pour tout singleton a, car $\mathrm{U}(\overline{a}/B) = \mathrm{RM}(\overline{a}/B) < \omega$ dans toute théorie $\aleph_1$-catégorique et d ainsi que U sont additifs. Si $\mathrm{d}(a/B) = 0$, alors a est algébrique au-dessus de B par (2), d'où $\mathrm{U}(a/B) = 0$. Puis, si $\mathrm{d}(a/B) = 1$, on voit facilement que a est interalgébrique (au sens de T^c) avec un élément générique rouge. Donc, $\mathrm{U}(a/B) = 1$ par (3). Finalement, si $\mathrm{d}(a/B) = 2$, l'argument que nous avons donné ci-dessus montre que a est interalgébrique avec une paire (r_1, r_2) d'éléments génériques rouges (indépendants). A fortiori, $\mathrm{U}(a/B) = \mathrm{U}(r_1r_2/B) = 2$. $\square$

Le résultat suivant se montre comme son analogue dans la fusion (Proposition 3.5.3).

Proposition 4.2.41. *Soit (T_0, T_1) un contexte bicolore fortement minimal, et soit D_0' un ensemble fortement minimal ($\emptyset$-)interprétable dans T_0. Pour $i = 0, 1$, soit T_i' la morleyisée de la théorie de D_0' avec toute la structure induite par T_i. On suppose :*

- *T_0' est modulaire,*
- *T_i' est fortement minimale pour $i = 0, 1$,*
- *il existe un collapse pour le contexte bicolore (T_0', T_1').*

Alors il existe un collapse pour (T_0, T_1) aussi. Plus précisément, si $\tilde{\mathcal{C}}_0'^c$ est un collapse pour (T_0', T_1'), avec T'^c la théorie des riches dans $\tilde{\mathcal{C}}_0'^c$, alors

$$\tilde{\mathcal{C}}_0^c := \{K \in \tilde{\mathcal{C}}_0 \mid D_0'(K) \in \tilde{\mathcal{C}}_0'^c\}$$

donne un collapse pour (T_0, T_1), et $K \models T^c$ ssi $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ et $D_0'(K) \models T'^c$. Ici, si $K \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, l'ensemble des points rouges $R'^{K'}$ dans $K' := D_0'(K)$ est défini comme $R'^{K'} := \mathrm{acl}_0^{eq}(R^K) \cap K'$. $\square$

Fait 4.2.42 ([BH00])**.** *Supposons que T_1 a la DMP et que T_0 est la théorie d'un ensemble infini sans structure (le cas noir). Alors il existe un collapse pour le contexte bicolore (T_0, T_1).*

Notons que dans leur preuve de l'existence d'un collapse des corps noirs [BH00], Baldwin et Holland remarquent que l'on pourrait remplacer la théorie ACF_p par n'importe quelle théorie fortement minimale T_1 (dans un langage dénombrable) ayant la DMP et telle que T_1 élimine les imaginaires. Or, on peut se passer de l'hypothèse sur l'élimination des imaginaires, comme le montre par exemple la preuve simplifiée du collapse des corps noirs donnée dans [BMZ06].

Fait 4.2.43 ([BMZ05b]). *Il y a un collapse pour les corps rouges en caractéristique positive, c'est à dire dans le contexte bicolore où $T_1 = ACF_p$ et $T_0 = \mathrm{EV}_{\mathbb{F}_p}$.*

En inspectant la preuve du Fait 4.2.43 donnée par Baudisch, Martin-Pizarro et Ziegler, on voit qu'elle se généralise sans problème au résultat suivant. Le seul changement à faire concerne l'axiomatisation de la théorie des structures riches du collapse. Dans un contexte quelconque, on est obligé d'ajouter des axiomes qui garantissent l'existence d'éléments génériques (rouges et blancs) au-dessus de tout ensemble fini de paramètres. Cela se fait (voir les axiomes $T'_\omega(4,5)$ sur la page 114).

Fait 4.2.44. *Supposons que T_1 a la DMP et que T_0 est essentiellement donnée par $\mathrm{EV}_{\mathbb{F}_q}$ (le cas rouge). Alors il existe un collapse pour le contexte bicolore (T_0, T_1).*

Théorème 4.2.45. *Soit (T_0, T_1) un contexte bicolore fortement minimal. On suppose que T_1 a la DMP. Alors il existe un collapse pour (T_0, T_1). En particulier, si T_1 n'est pas triviale, il existe une $\mathcal{L}$-structure (M, R^M) avec $M \models T_1$ et $R^M \preccurlyeq_{\mathcal{L}_0} M$, telle que (M, R^M) soit presque fortement minimale (avec un unique type générique de rang 2) et telle que R^M soit fortement minimal.*

Preuve. On utilise le Lemme 3.2.4 et la Proposition 4.2.41 pour réduire le problème de l'existence d'un collapse aux cas rouge et noir.

Le cas noir se collapse par le Fait 4.2.42, tandis que le cas rouge se collapse par le Fait 4.2.44. □

Remarque 4.2.46. *Si T_1 est triviale, on peut aussi donner un collapse "à la main". On définit une classe $\tilde{\mathcal{C}}_0^c \subseteq \tilde{\mathcal{C}}_0$ comme suit : une structure bicolore K est dans $\tilde{\mathcal{C}}_0^c$ si et seulement si pour tout a, b avec $b \in \mathrm{acl}_1(a)$ et $a, b \in R$ on a $a = b$. Ce sont exactement les $\mathcal{L}$-structures de la forme (M, R^M), avec $M \models T_1$ telle qu'il y a au plus un point rouge sur chaque ensemble de la forme $\mathrm{acl}_1(a)$ (où $a \in M$ est un singleton), et telle que aucun point rouge ne soit dans $\mathrm{acl}_1(\emptyset)$. La classe $\tilde{\mathcal{C}}_0^c$ est un collapse, comme on voit facilement.*

Ce collapse explicite correspond d'ailleurs à une classe $\tilde{\mathcal{C}}_0^\mu$ pour $\mu \equiv 0$, définie de manière analogue que dans le contexte bicolore abélien. On vérifie que T_ω est dimensionnelle dans ce cas, n'ayant que des types admissibles basés sur $\emptyset$ (tous de longueur 2). Comme il n'y a que des types admissibles triviales dans ce cas, l'argument est bien plus élémentaire que dans un contexte bicolore abélien, car les types admissibles non-modulaires sont les plus durs à maîtriser.

Chapitre 5

Automorphismes génériques et amalgames

Soit T une théorie dans un langage $\mathcal{L}$, et soit $\mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L} \cup \{\sigma\}$, où σ est un nouveau symbole de fonction unaire, et considérons la $\mathcal{L}_\sigma$-théorie T_σ qui est obtenue en ajoutant à T des axiomes exprimant que σ est un automorphisme du modèle de T. On suppose que T est modèle-complète. Cela entraîne que T_σ est une théorie inductive, et elle a une modèle-compagne (notée TA, si elle existe) si et seulement si la classe des modèles existentiellement clos de T_σ est une classe élémentaire. Si c'est le cas, on dira que *l'automorphisme générique est axiomatisable*, ou encore que TA *existe*.

Si la théorie T du départ n'est pas modèle-complète, nous dirons que l'automorphisme générique est axiomatisable, s'il est axiomatisable pour une expansion par définition T^* de T qui est modèle-complète.

Si T a la propriété de l'ordre stricte, on sait que TA n'existe pas [KS02], et on ne connaît aucune théorie instable T pour laquelle TA existe. Nous supposerons donc dans la suite que T est stable.

Si TA existe, alors toutes ses complétions sont simples [CP98] (supersimple si T est superstable), et en général instables. L'étude de TA (paradigmatiquement celle de $ACFA$ dans [CH99]) s'est avérée extrêmement importante pour les applications de la théorie des modèles en géométrie algébrique et en théorie des nombres [Hr01, Sc02, Hr04].

Dans ce chapitre, nous allons donner un critère simple garantissant l'axiomatisabilité de l'automorphisme générique, pour des théories T stables et complètes. Nous vérifions ensuite que ce critère est satisfait par plusieurs des théories que nous avons considérées dans cette thèse, ainsi que par d'autres théories obtenues par la méthode d'amalgamation de Hrushovski sans collapse. Avant de préciser les contextes, pour éviter des répétitions, nous fixons quelques notations : Les théories T_1 et T_2 sont des expansions fortement minimales de la théorie T_0. La théorie T_0 est totalement catégorique et modulaire, et les théories T_1 et T_2 ont la DMP.

Seront inclus dans la suite :

(A) L'exemple "ab initio" de Hrushovski avant collapse [Hr93] (cf. 1.4.12(1)).

(B) La théorie T_ω de la fusion libre de T_1 et T_2 au-dessus de T_0, issue d'un contexte de fusion fortement minimal (T_0, T_1, T_2) (cf. 3.1.1).

(C) La théorie T_ω issue du contexte bicolore fortement minimal (T_0, T_1), traitée dans la Sous-section 4.2.2 (en particulier les corps noirs de Poizat en toute caractéristique [Po99], ainsi que les corps rouges de Poizat en caractéristique positive [Po01]).

(D) La théorie d'une courbe plane générique dans T_1, traitée dans la Section 4.1 (en particulier la courbe plane générique dans ACF étudiée dans [CHKP02]).

(E) Les corps verts en caractéristique 0 (voir [Po01]).

Remarque. *Les contextes (A-E) se collapsent. Par ailleurs, les théories collapsées ont toutes un rang de Morley fini et additif, et elles ont la DMP. On sait alors axiomatiser l'automorphisme générique pour les versions collapsées, par des résultats de [CP98].*

5.1 Un critère simple

Le cadre que nous présontons dans cette section et dans lequel on sait axiomatiser l'automorphisme générique permet une unification de plusieurs preuves existantes (dans des contextes où on sait également axiomatiser). C'est plutôt un principe général pour organiser de telles preuves. Quand on le compare avec la caractérisation des théories stables et complètes dans lesquelles l'automorphisme générique est axiomatisable donnée dans [BS01], ou encore avec la reformulation de cette caractérisation dans [Pi02], le critère que nous présentons est de nature plus "géométrique", car il met en jeu des considérations globales.

Définition 5.1.1. Soit T une théorie stable et complète. On suppose qu'on a une *relation de généricité* $R_\mathfrak{g}$ définie sur les paires de la forme $(p(\overline{x}), \varphi(\overline{x}))$ où $p(\overline{x}) \in S(B)$ est un type fort et $\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \in p$ une formule à paramètres dans B.

Si (p, φ) est dans $R_\mathfrak{g}$, on dit que *p est générique dans φ*. Si $\overline{a}$ est un uplet satisfaisant une formule φ à paramètres dans B, on dit que *$\overline{a}$ est générique dans φ au-dessus de B* si $p := \mathrm{stp}(\overline{a}/B)$ est générique dans φ (c'est à dire si (p, φ) est dans $R_\mathfrak{g}$).

Une formule (sans paramètres) $\psi(\overline{x}, \overline{z})$ est *jolie* si pour tout $\overline{b}$ tel que $\psi(\overline{x}, \overline{b}) \neq \emptyset$ et pour tout modèle M contenant $\overline{b}$ il y a un unique type $p \in S(M)$ qui est générique dans $\psi(\overline{x}, \overline{b})$. Puis, on dit que $\psi(\overline{x}, \overline{b}) \neq \emptyset$ est jolie si $\psi(\overline{x}, \overline{z})$ l'est.

Un type $p \in S(M)$ (où M est un modèle) est *joli* si l'ensemble $J(p)$ défini ci-dessous est cofinal dans p (c'est à dire si $J(p) \vdash p$) :

$$J(p) := \{\psi(\overline{x}, \overline{b}) \text{ jolie } \mid p \text{ générique dans } \psi(\overline{x}, \overline{b}), \overline{b} \in M\}.$$

Une relation $R_\mathfrak{g}$ comme ci-dessus est une *bonne notion partielle de généricité* (pour T) si elle satisfait aux propriétés suivantes :

(1) $R_{\mathfrak{g}}$ est invariante par automorphismes et permutations de variables.

(2) Supposons que $\models \varphi(\overline{a}, \overline{b})$ et $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{\overline{b}} B$. Alors $\overline{a}$ est générique dans $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ au-dessus de $\overline{b}$ ssi $\overline{a}$ est générique dans $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ au-dessus de $B\overline{b}$.

(3) Il y a suffisamment de types jolis, dans le sens que pour tout n-type p_0 au-dessus d'un modèle M, il existe (pour un certain m) un type joli $p \in S^{n+m}(M)$ tel que $\pi(p) = p_0$, π étant la projection naturelle $S^{n+m}(M) \to S^n(M)$.

(4) Soit $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, et soient $\psi(\overline{x}, \overline{b})$ et $\varphi(\overline{x}_1, \overline{b}_1)$ des formules jolies, avec types génériques $p(\overline{x})$ et $p_1(\overline{x}_1)$ dans $S(B)$, respectivement (B contenant $\overline{b}$ et $\overline{b}_1$), et telles que $\overline{b}_1 \subseteq \overline{b}$ et $\models \psi(\overline{x}, \overline{z}) \to \varphi(\overline{x}_1, \overline{z}_1)$. Alors, si $\pi_1(p) = p_1$, il existe $\theta(\overline{z}) \in \operatorname{tp}(\overline{b}/\emptyset)$ telle que pour tout $\overline{b}' \models \theta(\overline{z})$, on ait $\psi(\overline{x}, \overline{b}') \neq \emptyset$, et l'unique type générique p' dans $\psi(\overline{x}, \overline{b}')$ se projette sur l'unique type générique p_1' de $\varphi(\overline{x}_1, \overline{b}_1')$.

Proposition 5.1.2. *Soit T une théorie stable, complète et modèle-complète. Supposons que T admet une bonne notion partielle de généricité. Alors la théorie TA existe.*

Preuve. Soient $(M, \sigma) \models T_\sigma$ et $\tilde{p}(\overline{x}, \overline{x}', \overline{x}_r) \in S^{2n+k}(M)$ un type joli se projetant sur des types jolis $p(\overline{x})$ et $p'(\overline{x}')$ dans $S^n(M)$ tels que $p' = \sigma(p)$. Soient $\psi(\overline{x}, \overline{x}', \overline{x}_r, \tilde{b}) \in J(\tilde{p})$, puis $\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \in J(p)$ et donc $\varphi(\overline{x}', \sigma(\overline{b})) \in J(p')$ telles que $\tilde{b} \supseteq \overline{b}\sigma(b)$ (c'est à dire $\tilde{z} \supseteq \overline{zz}')$ et $\models \psi(\overline{x}, \overline{x}', \overline{x}_k, \tilde{z}) \to \varphi(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \varphi(\overline{x}', \overline{z}')$. Puis, soient $\theta(\tilde{z})$ et $\theta'(\tilde{z})$ données par la propriété (4) pour les paires de formules $(\psi(\overline{x}, \overline{x}', \overline{x}_r, \tilde{b}), \varphi(\overline{x}, \overline{b}))$ et $(\psi(\overline{x}, \overline{x}', \overline{x}_k, \tilde{b}), \varphi(\overline{x}', \sigma(\overline{b})))$. Posons $\Theta(\tilde{z}) := \theta(\tilde{z}) \wedge \theta'(\tilde{z}) \wedge \sigma(\overline{z}) = \overline{z}'$. Pour une telle situation, on met l'axiome suivant :

$$\forall \tilde{z} \exists \overline{x}\, \overline{x}_r [\Theta(\tilde{z}) \to \psi(\overline{x}, \sigma(\overline{x}), \overline{x}_r, \tilde{z})].$$

Maintenant, on montre que les modèles existentiellement clos de T_σ sont exactement les modèles de T_σ qui satisfont tous les axiomes du type décrit.

Soit (M, σ) un modèle existentiellement clos de T_σ. Supposons que $(M, \sigma) \models \Theta(\tilde{b})$ pour un $\tilde{b} \in M$, où $\Theta(\tilde{z})$ est associée aux formules jolies $\psi(\overline{x}, \overline{x}', \overline{x}_r, \tilde{z})$ et $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$. Cela veut dire que l'unique type générique $\tilde{p}$ de $\psi(\overline{x}, \overline{x}', \overline{x}_r, \tilde{b})$ se projette sur les uniques types génériques p et $p' = p^\sigma$ de $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ et $\varphi(\overline{x}', \sigma(\overline{b}))$ respectivement. Notons que l'égalité $p' = \sigma(p)$ utilise l'unicité d'un type générique dans une formule jolie ainsi que l'invariance par automorphisme de la notion de généricité. On choisit une solution $\tilde{a} = (\overline{a}, \overline{a}', \overline{a}_r) \models \tilde{p}|M$. Par conséquent, on a $\overline{a} \models p|M$ et $\overline{a}' \models (p|M)^\sigma$, et il y a donc $M \preccurlyeq N$ contenant $\tilde{a}$ et $\sigma^* \in Aut(N)$ étendant σ satisfaisant $\sigma^*(\overline{a}) = \overline{a}'$, d'où $(N, \sigma^*) \models \exists \overline{x}\, \overline{x}_r \psi(\overline{x}, \sigma(x), \overline{x}_r, \tilde{b})$. Comme (M, σ) est existentiellement clos, une telle solution existe déjà dans M. L'axiome correspondant à ψ et φ est donc satisfait par (M, σ). En particulier, les axiomes que nous avons donnés sonts consistants puisque T_σ a des modèles existentiellement clos (c'est une théorie inductive).

Réciproquement, soit $(M, \sigma) \models T_\sigma$ un modèle des axiomes ci-dessus. Soient $(M, \sigma) \subseteq (N, \sigma) \models T_\sigma$ et $\overline{a}_0 \in N$, satisfaisant une certaine $\mathcal{L}_\sigma$-formule sans quanteurs à paramètres dans M. Par une réduction standard, on peut supposer que cette formule est de la forme $\chi(\overline{x}_0, \sigma(\overline{x}_0), \overline{b}_0)$, où $\chi(\overline{x}_0, \overline{x}'_0, \overline{z}_0)$ est une $\mathcal{L}$-formule sans quanteurs. On pose $p_0 := \mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}_0/M)$ et $p'_0 = p_0^\sigma := \mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(\sigma(\overline{a}_0)/M) \in S^n(M)$. Par la condition (3) dans la Définition 5.1.1, on peut choisir un type joli $p \in S^{n+m}(M)$ qui se projette sur p_0. Quitte à remplacer (N, σ) par une extension $(\tilde{N}, \tilde{\sigma})$, on peut supposer qu'il existe un uplet $\overline{a} \in N$ contenant $\overline{a}_0$ avec $N \models p(\overline{a})$. Alors $\sigma(\overline{a})$ contient $\sigma(\overline{a}_0)$. Ensuite, on choisit un type joli $\tilde{p}(\overline{x}, \overline{x}', \overline{x}_r) \in S(M)$ dont les restrictions sont p et $p' = p^\sigma$, respectivement. Pour cela, il suffit d'appliquer (3) au type $\mathrm{tp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}, \sigma(\overline{a})/M)$. Soient $\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \in J(p)$ et $\psi(\overline{x}, \overline{x}', \overline{x}_r, \tilde{b}) \in J(\tilde{p})$ telles que $\psi(\overline{x}, \overline{x}', \overline{x}_r, \tilde{b})$ implique $\chi(\overline{x}_0, \overline{x}'_0, \overline{b}_0) \wedge \varphi(\overline{x}, \overline{b}) \wedge \varphi(\overline{x}', \sigma(\overline{b}))$ (c'est possible car $J(\tilde{p}) \vdash \tilde{p}$).

Or, comme $(M, \sigma) \models \Theta(\tilde{b})$, l'axiome correspondant nous fournit des uplets $\overline{\alpha}, \overline{\alpha_r} \in M$ tels que $M \models \psi(\overline{\alpha}, \sigma(\overline{\alpha}), \overline{\alpha}_r, \tilde{b})$. A fortiori, $(M, \sigma) \models \chi(\overline{\alpha}_0, \sigma(\overline{\alpha}_0), \overline{b}_0)$ pour le sous-uplet correspondant $\overline{\alpha}_0$ de $\overline{\alpha}$. Donc, (M, σ) est existentiellement clos. □

Remarque 5.1.3. *Voici quelques contextes dans lesquels on sait axiomatiser l'automorphisme générique et où les preuves sont juste des instances de (la preuve de) la Proposition 5.1.2. (1) et (2) sont donnés dans [CP98], et (3) est dans [Bu06].*

(1) T de rang de Morley fini satisfaisant
   - RM *est additif : pour tout $\overline{a}, \overline{b}$ et C on a* $\mathrm{RM}(\overline{a}\overline{b}/C) = \mathrm{RM}(\overline{a}/\overline{b}C) + \mathrm{RM}(\overline{b}/C)$.
   - *T a la DMP : si* $\mathrm{RDM}(\varphi(\overline{x}, \overline{b})) = (n, d)$ *pour une formule $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$ et un uplet $\overline{b}$, il existe $\theta(\overline{z}) \in \mathrm{tp}(\overline{b})$ telle que* $\mathrm{RDM}(\varphi(\overline{x}, \overline{b}'))= (n, d)$ *pour tout $\overline{b}' \models \theta(\overline{z})$).*

   Dans une telle théorie, il suffit de considérer la notion de généricité donnée par le rang de Morley. Cette notion satisfait clairement les propriétés (1–2) dans la Définition 5.1.1. Quant à (3), c'est une conséquence de la DMP. Finalement, (4) suit de l'additivité du rang combinée avec la DMP.

(2) Soit T une théorie complète de modules totalement transcendante, ou plus généralement une théorie complète d'un groupe monobasé qui est totalement transcendante. Toute formule est équivalente à une combinaison booléenne de cosettes définissables (dont les sous-groupes associés sont $\mathrm{acl}^{eq}(\emptyset)$-définissables), par le Fait 3.2.18. Un type fort p est toujours le type générique d'une cosette définissable de $\mathrm{stab}(p)$ *(un groupe connexe).*

   On considère la notion de généricité suivante : Soit G un groupe (définissable et) connexe, et soient $H_1, \ldots, H_n \subsetneq G$ des sous-groupes propres (définissables). On considère des formules $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$ de la forme $\overline{x} \in \overline{z}_0 \cdot G \setminus (\bigcup_{i=1}^n \overline{z}_i \cdot H_i)$ et on dit que p est générique dans $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ si et seulement si p est le type générique de la cosette $\overline{b}_0 \cdot G$ (au sens d'un groupe stable ou au sens du rang de Morley, c'est la même chose). On vérifie sans peine que cela définit une bonne notion partielle de généricité.

*(3) Soit DCF_0 la théorie des corps différentiellement clos de caractéristique 0. Dans [Bu06], il est montré que la notion de D-*généricité pour la topologie de Kolchin *est une bonne notion partielle de généricité.*

5.2 Application aux amalgames

Nous revenons aux amalgames. Voilà le résultat promis :

Théorème 5.2.1. *Dans les contextes (A-E), la théorie TA existe et admet une axiomatisation naturelle.*

Pour prouver le Théorème 5.2.1, par 5.1.2, il suffit de trouver une bonne notion partielle de généricité $R_{\mathfrak{g}}$ dans ces contextes (A-E). L'existence d'une telle relation $R_{\mathfrak{g}}$ se montre de façon très similaire dans chacun des cinq contextes, et nous ne donnerons la construction explicite que dans les cas les plus compliqués : la fusion libre (B) et la théorie des corps verts non-collapsés en caractéristique 0 (E).

Preuve de 5.2.1 dans le contexte (B). Soit (T_0, T_1, T_2) un contexte de fusion fortement minimal, et où les théories T_i ont la DMP. On est donc dans le cadre de la Section 3.1, et la théorie de la fusion libre T_ω est ω-stable (Théorème 3.1.9). De plus, pour $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, le $\mathcal{L}$-type (dans la théorie T_ω) d'un uplet fort est déterminé par son $\mathcal{L}$-type sans quanteurs (Théorème 3.1.5). On travaille dans une expansion par définitions $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$ convenable dans laquelle T_ω élimine les quanteurs, et on écrit T au lieu de T_ω^*.

Les seuls types (forts) qui peuvent éventuellement être génériques dans une formule seront dans la classe de parallélisme d'un type $p(\overline{x}) = \mathrm{tp}_T(\overline{a}/M_0)$, où $M_0 \preccurlyeq M \models T$ et $M_0 \subseteq M_0\overline{a} \leq M$. Notons les similarités avec l'axiomatisation de T_ω dans la Section 2.3. Or, ici on peut forcer l'unicité des types génériques au niveau des langages $\mathcal{L}_i$, en utilisant la DMP. Soit $p_i(\overline{x}) := p(\overline{x}) \restriction_{\mathcal{L}_i}$ et soit $\overline{b} \leq M_0$ fini contenant les bases canoniques de p_i pour $i = 0, 1, 2$. En particulier, on a $\mathrm{d}_i(\overline{a}/M_0) = \mathrm{d}_i(\overline{a}/\overline{b})$ et donc $\delta(\overline{a}/\overline{b}) = \delta(\overline{a}/M_0) = \mathrm{d}(\overline{a}/M_0) = e$. Grâce à la DMP, on trouve des formules $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b}) \in p_i$ satisfaisant :

(I) Le type $\mathrm{tp}_0(\overline{a}, \overline{b})$ est isolé par $\varphi_0(\overline{x}, \overline{z})$.

(II) $T_i \vdash \varphi_i \to \varphi_0$ pour $i = 1, 2$.

(III) Pour $i = 1, 2$, la formule $\varphi_i(\overline{x}, \overline{z})$ est rang-complète par rapport à $\mathrm{tp}_i(\overline{a}/\overline{b})$. De plus, si $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b}') \neq \emptyset$, on a $\mathrm{DM}_i(\varphi_i(\overline{x}, \overline{b}')) = 1$.

On pose $\varphi(\overline{x}, \overline{z}) := \varphi_1(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \varphi_2(\overline{x}, \overline{b})$ et $\theta_\varphi(\overline{z}) := \exists \overline{x} \varphi_1(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \exists \overline{x} \varphi_2(\overline{x}, \overline{z})$ En utilisant (I–III), on obtient

($*$) Si $\models \varphi(\overline{a}', \overline{b}')$ et $\overline{b}' \subseteq B'$ avec $\overline{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{0}_{\overline{b}'} B'$, alors $\delta(\overline{a}'/B') \leq e$. De plus si $\overline{b}' \models \theta_\varphi(\overline{z})$ et $\overline{b}' \subseteq B'$, alors il existe un unique $\mathcal{L}$-type sans quanteurs $\pi(\overline{x})$ au-dessus de B' contenant $\varphi(\overline{x}, \overline{b}')$ tel que $\overline{a}'' \models \pi$ si et seulement si $\overline{a}'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{0}_{\overline{b}'} B'$ et $\delta(\overline{a}''/\overline{b}') = e$.

On dit qu'une telle $\mathcal{L}$-formule φ est *de dimension e*.

Les formules $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b})$ satisfaisant (II-III) sont cofinales dans $\mathrm{tp}_i(\overline{a}/\overline{b})$, pour $i = 1, 2$. On en déduit :

($**$) Les formules de la forme $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ sont cofinales dans $\mathrm{qftp}(\overline{a}/M_0)$.

Ensuite, on se permet d'enlever une partie “petite” (c'est à dire de dimension $< e$) d'une formule $\varphi(\overline{x}, \overline{z})$ de dimension e. Pour cela, on considère une $\mathcal{L}$-formule existentielle $\tau(\overline{x}, \overline{z})$ à quantification bornée, telle que $\models \tau(\overline{a}', \overline{b}')$ implique $\mathrm{d}(\overline{a}'/\overline{b}') < e$. Maintenant, il suffit de définir $R_{\mathfrak{g}}$ comme suit :

Généricité Soient $\varphi(\overline{x}, \overline{z}) := \bigwedge_{i=0}^{2} \varphi_i(\overline{x}, \overline{z})$ et $\tau(\overline{x}, \overline{z})$ comme ci-dessus et $\overline{a}'$ un uplet satisfaisant $\varphi(\overline{x}, \overline{b}') \wedge \neg\tau(\overline{x}, \overline{b}')$. Alors, $\overline{a}'$ est générique dans $\varphi(\overline{x}, \overline{b}') \wedge \neg\tau(\overline{x}, \overline{b}')$ au-dessus de $B' \supseteq \overline{b}'$ si et seulement si $\mathrm{cl}_\omega(B')\overline{a}'$ est fort (dans l'univers) et $\overline{a}'$ est $\mathcal{L}_i$-générique dans $\varphi_i(\overline{x}, \overline{b}')$ au-dessus de $\mathrm{cl}_\omega(B')$ pour $i = 0, 1, 2$.

Ce sont les seules formules et types forts pour lesquels la généricité est définie.

Montrons que cela définit une bonne notion partielle de généricité, c'est à dire qui satisfait aux propriétés (1-4) données dans la Définition 5.1.1.

Pour (1), c'est évident. On montre (2) en utilisant les amalgames libres et la Remarque 2.4.2. Quant à (3), montrons d'abord que tout type $p := \mathrm{tp}(\overline{a}/M_0)$ avec $M_0\overline{a} \leq M$ est joli. Par construction, les formules $\varphi(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \neg\tau(\overline{x}, \overline{z})$ de la forme considérée sont toutes jolies, car par le Théorème 3.1.5 le type p est déterminé par $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}/M_0)$ plus le fait que $M_0\overline{a}$ soit fort. Le type p est donc le seul type générique dans $\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \wedge \neg\tau(\overline{x}, \overline{b})$ au-dessus de M_0, par $(*)$. Le même raisonnement montre que si $\models \theta_\varphi(\overline{b}')$ pour $\overline{b}' \in M_0' \models T$, alors il y a un unique type générique p' dans $\varphi(\overline{x}, \overline{b}') \wedge \neg\tau(\overline{x}, \overline{b}')$ au-dessus de M_0.

Pour voir que les formules de la forme $\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \wedge \neg\tau(\overline{x}, \overline{b})$ sont cofinales dans p, il suffit de combiner le Théorème 3.1.5 avec le Lemme 2.3.5 et $(**)$.

Maintenant, si $p_0 = \mathrm{tp}(\overline{a}_0/M_0) \in S_T^n(M_0)$ est est un type quelconque (pour $M_0 \models T$), on sait que $\mathrm{d}_0(\mathrm{cl}_0(M_0\overline{a}_0)/M_0)$ est fini, et on trouve alors $\overline{a}_0 \subseteq \overline{a} \subseteq_\omega \mathrm{cl}_0(M_0\overline{a}_0)$ avec $M_0\overline{a}$ fort. Par le paragraphe précédent, le type $p := \mathrm{tp}(\overline{a}/M_0) \in S^{n+m}(M_0)$ est joli. Comme p étend p_0, on termine la preuve de (3).

Reste à vérifier la propriété (4). On se donne $\psi(\overline{x}, \overline{b}) = \psi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{b})$ et $\psi_1(\overline{x}_1, \overline{b}_1)$, des formules jolies, avec $\overline{b}_1 \subseteq \overline{b} \subseteq B$. On suppose que $p(\overline{x}) \in S(B)$ est l'unique type générique dans $\psi(\overline{x}, \overline{b})$, de même $p_1(\overline{x}_1) \in S(B)$ dans $\psi(\overline{x}_1, \overline{b}_1)$. De plus, on suppose que $\pi_1(p) = p_1$ et $\models \psi(\overline{x}, z) \to \psi_1(\overline{x}_1, \overline{z}_1)$. On sait que $\psi(\overline{x}, \overline{z}) = \bigwedge_{i=0}^{2} \varphi_i(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \neg\tau(\overline{x}, \overline{z})$ et $\psi_1(\overline{x}_1, \overline{z}_1) = \bigwedge_{i=0}^{2} \varphi_i'(\overline{x}_1, \overline{z}_1) \wedge \neg\tau'(\overline{x}_1, \overline{z}_1)$ pour des formules convenables. Les formules τ et τ' ne jouant aucun rôle dans cette discussion, il suffit de contrôler ce qui se passe au niveau des langages $\mathcal{L}_i$. Ansi, on définit $\theta_i(\overline{z})$ comme l'ensemble des $\overline{z}$ pour lesquels $\exists \overline{x}_2 \varphi_i(\overline{x}, \overline{z})$ est $\mathcal{L}_i$-générique dans $\varphi_i'(\overline{x}_1, \overline{z}_1)$ et on pose $\theta(\overline{z}) := \bigwedge_{i=0}^{2} \theta_i(\overline{z}) \wedge \theta_\varphi(\overline{z}) \wedge \theta_{\varphi'}(\overline{z}_1)$. Par construction, $\models \theta(\overline{b})$ et pour tout $\overline{b}' \models \theta(\overline{z})$ l'unique type générique de $\psi(\overline{x}, \overline{b}')$ se projette sur l'unique type générique de $\psi_1(\overline{x}_1, \overline{b}_1')$. □

Le contexte (E), la théorie d'un corps vert non-collapsé, est issu d'une amalgamation de Hrushovski qui sort des cadres axiomatiques traités dans cette thèse. Néanmoins, il est similaire à un contexte bicolore où le réduit en question n'est pas ω-catégorique. Cela rend le traitement plus compliqué et exige des théorèmes profonds déjà pour montrer par exemple que la classe $\tilde{\mathcal{C}}_0$ dans laquelle on amalgame est une classe élémentaire.

Nous expliquons brièvement la construction des *corps verts* en caractéristique 0, due à Poizat [Po01]. Pour cela, nous procédons comme dans [BHMW06], où le collapse de la théorie de ces corps verts est effectué et où est donc construit un mauvais corps de caractéristique 0.

Soit $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{rings} \cup \{\ddot{\mathrm{U}}\}$, où $\mathcal{L}_{rings}$ est le langage des anneaux et Ü un nouveau prédicat unaire (ce prédicat est utilisé dans [BHMW06], tandis que Poizat le nomme V dans [Po01]). On considère des $\mathcal{L}$-structures $(K, \ddot{\mathrm{U}}(K))$ avec $K \models ACF_0$ et $\ddot{\mathrm{U}}(K) \subseteq K^*$ un sous-groupe divisible sans torsion du groupe multiplicatif du corps K. L'ensemble $\ddot{\mathrm{U}}(K)$ est donc un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (écrit multiplicativement) ; sa dimension linéaire (et plus généralement la $\mathbb{Q}$-dimension linéaire dans le groupe multiplicatif modulo torsion) est dénotée par $\mathrm{l.dim}_{\mathbb{Q}}$. Pour $A \subseteq K$ on écrit $\ddot{\mathrm{U}}(A) := \ddot{\mathrm{U}}(K) \cap A$. Puis, on note $\mathrm{env}(A)$ l'union de l'enveloppe divisible de $A^* := A \cap K^*$ dans $(K^*, \cdot)$ et $\{0\}$. Si $A = \mathrm{env}(A)$ avec $\mathrm{deg.tr}(A)$ et $\mathrm{l.dim}_{\mathbb{Q}}(\ddot{\mathrm{U}}(A))$ finis, on pose

$$\delta(A) := 2\,\mathrm{deg.tr}(A) - \mathrm{l.dim}_{\mathbb{Q}}(\ddot{\mathrm{U}}(A)).$$

De même, si $\overline{a}, \overline{b} \in K$, on pose

$$\delta(\overline{a}) := \delta(\mathrm{env}(\overline{a})) \text{ et } \delta(\overline{a}/\overline{b})) := \delta(\mathrm{env}(\overline{a}\overline{b})) - \delta(\mathrm{env}(\overline{b})).$$

Comme d'habitude, on étudie la classe $\tilde{\mathcal{C}}_0$ des $\mathcal{L}$-structures $(K, \ddot{\mathrm{U}}(K))$ comme ci-dessus avec $\delta(\overline{a}) \geq 0$ pour tout $\overline{a} \in K$, et on définit l'autosuffisance $\leq$ ainsi que la fonction de dimension d de la manière usuelle. Ensuite, soit $\mathcal{C}_0$ la classe des $(K, \ddot{\mathrm{U}}(K))$ dans $\tilde{\mathcal{C}}_0$ avec $\mathrm{deg.tr}(K) < \infty$. On montre sans peine que $(\tilde{\mathcal{C}}_0, \leq)$ est connexe et a la propriété d'amalgamation. De plus, $\mathcal{C}_0$ est dénombrable. Soit M_ω la limite de Fraïssé de $(\mathcal{C}_0, \leq)$. En utilisant des résultats d'Ax en algèbre différentielle, Poizat montre dans [Po01] que $\tilde{\mathcal{C}}_0$ est une classe élémentaire ainsi que le résultat suivant :

Fait 5.2.2. *Soit $T_\omega := \mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(M_\omega)$. Alors M_ω est un modèle ω-saturé de T_ω, et cette théorie est ω-stable de rang de Morley $\omega \cdot 2$. De plus,* $\mathrm{RM}(\ddot{U}) = \omega$.

Comme dans les autres contextes d'amalgamation “à la Hrushovski” que nous avons considérés, le $\mathcal{L}$-type d'un uplet fort dans T_ω est déterminé par son type sans quanteurs. Pour la construction d'une relation de généricité $R_{\mathfrak{g}}$ dans T_ω, on a besoin d'un résultat supplémentaire :

Lemme 5.2.3 ([BHMW06, Lemma 10.3])**.** *Soient $B = \mathrm{env}(B) \leq M \in \tilde{\mathcal{C}}_0$, $\overline{a} \in M$ et supposons que $\mathrm{d}(\overline{a}/B) = e$. Alors il existe une $\mathcal{L}$-formule existentielle $\tau_d(\overline{x}, \overline{z})$ et un uplet $\overline{b} \in B$ avec les propriétés suivantes :*
- $\models \tau_d(\overline{a}, \overline{b})$,
- *pour tout $\overline{a}', \overline{b}' \in M' \in \tilde{\mathcal{C}}_0$ avec $\models \tau_d(\overline{a}', \overline{b}')$ on a $\mathrm{d}(\overline{a}'/\overline{b}') \leq e$.*

Preuve de 5.2.1 dans le contexte (E). Cette fois, nous travaillons dans la morleyisée T de T_ω (dans le langage $\mathcal{L}^* \supseteq \mathcal{L}$). On exhibe une relation de généricité

$R_{\mathfrak{g}}$ pratiquement comme dans le cas de la fusion libre. Seuls les $\mathcal{L}^*$-types de la forme $p := \mathrm{tp}_T(\overline{a}/M_0)$ pour $\overline{a} \in M \succcurlyeq M_0 \models T$ avec $M_0\overline{a} \leq M$ seront possiblement génériques quelque part. Ici, par $M_0\overline{a} \leq M$ nous entendons le suivant :

$A := \mathrm{env}(M_0\overline{a}) \leq M$ et $\overline{a}$ contient une $\mathbb{Q}$-base de $\ddot{\mathrm{U}}(A)$ modulo $\ddot{\mathrm{U}}(M_0)$.

Un tel type $p = \mathrm{tp}_T(\overline{a}/M_0)$ est déterminé par $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}/M_0)$ plus le fait que $M_0\overline{a}$ soit fort.

Soit $\overline{b} \in M_0$ tel que

– $\overline{b}$ contient la base canonique de $p\restriction_{\mathcal{L}_{rings}} = \mathrm{tp}_{ACF_0}(\overline{a}/M_0)$ et

– $\mathrm{l.\,dim}_{\mathbb{Q}}(\overline{a}/M_0) = \mathrm{l.\,dim}_{\mathbb{Q}}(\overline{a}/\overline{b})$.

En particulier, $\mathrm{d}(\overline{a}/\overline{b}) = \delta(\overline{a}/\overline{b}) = \delta(\overline{a}/M_0) = \mathrm{d}(\overline{a}/M_0)$ pour un tel $\overline{b}$.

Prenons $\varphi_{\ddot{\mathrm{U}}}(\overline{x},\overline{z})$, une formule décrivant le diagramme sans quanteurs de $\overline{a},\overline{b}$ dans le langage $\{\ddot{\mathrm{U}}\}$ et soit $\varphi_c(\overline{x},\overline{z})$ une $\mathcal{L}_{rings}$-formule avec les propriétés suivantes :

(I) Le type $p\restriction_{\mathcal{L}_{rings}}$ est générique dans $\varphi_c(\overline{x},\overline{b})$, et pour tout $\overline{b}'$ avec $\varphi_c(\overline{x},\overline{b}') \neq \emptyset$, on a $\mathrm{RDM}_{ACF_0}(\varphi_c(\overline{x},\overline{b}')) = (k,1)$, où $k = \mathrm{deg.\,tr}(\overline{a}/M_0)$.

(II) Pour tout $\overline{a}'$ générique dans $\varphi_c(\overline{x},\overline{b}')$ au-dessus d'un corps algébriquement clos K' contenant $\overline{b}'$ on a $\overline{a}' \cap K' = \overline{a}' \cap \overline{b}'$ et $\mathrm{l.\,dim}_{\mathbb{Q}}(\overline{a}'/K') = \mathrm{l.\,dim}_{\mathbb{Q}}(\overline{a}/M_0)$. Si $\overline{c}$ est un sous-uplet de $\overline{a}$ et $\overline{c}'$ est le sous-uplet de $\overline{a}'$ correspondant, alors $\mathrm{l.\,dim}_{\mathbb{Q}}(\overline{c}'/K') = \mathrm{l.\,dim}_{\mathbb{Q}}(\overline{c}/M_0)$.

(III) Soit $\overline{b}' \in M_0' \models T$ avec $M_0' \models \exists\overline{x}\varphi_{\ddot{\mathrm{U}}}(\overline{x},\overline{b}') \wedge \exists\overline{x}\varphi_c(\overline{x},\overline{b}')$ et soit $\overline{a}'$ $\mathcal{L}_{rings}$-générique dans $\varphi_c(\overline{x},\overline{b}')$ au-dessus de M_0'. Alors, si l'on peint les éléments de $\overline{a}'$ en vert ou non selon la formule $\varphi_{\ddot{\mathrm{U}}}(\overline{x},\overline{b}')$, il existe $A' \leq M'$ tel que $M_0' \leq A' = \mathrm{env}(M_0'\overline{a}')$ et tel que $\overline{a}'$ contienne une $\mathbb{Q}$-base de $\ddot{\mathrm{U}}(A')$ modulo $\ddot{\mathrm{U}}(M_0')$ (c'est à dire $\overline{a}'$ engendre une extension autosuffisante de M_0').

Une telle formule φ_c existe : La théorie ACF_0 a la DMP, et on peut donc satisfaire à (I). C'est une conséquence de [Po01, Cor. 3.8] qu'on peut satisfaire à (II). Finalement, la discussion dans [Po01, p. 1675-76] montre que (III) est faisable aussi. Les formules de la forme $\varphi(\overline{x},\overline{b}) := \varphi_{\ddot{\mathrm{U}}}(\overline{x},\overline{b}) \wedge \varphi_c(\overline{x},\overline{b})$ sont même cofinales dans $\mathrm{qftp}_{\mathcal{L}}(\overline{a}/M_0)$. Soient $k = \mathrm{deg.\,tr}(\overline{a}/M_0)$ et $n = \mathrm{l.\,dim}_{\mathbb{Q}}(\ddot{\mathrm{U}}(\overline{a})/M_0) = \mathrm{l.\,dim}_{\mathbb{Q}}(\ddot{\mathrm{U}}(\overline{a})/\ddot{\mathrm{U}}(M_0))$. Posons $e := 2k - n \geq 0$, et soit $M_0' \models T$ tel que $M_0' \models \exists\overline{x}\varphi_{\ddot{\mathrm{U}}}(\overline{x},\overline{b}') \wedge \exists\overline{x}\varphi_c(\overline{x},\overline{b}')$. Par (III), il existe une extension autosuffisante $M_0' \leq A' = \mathrm{env}(M_0'\overline{a}')$, engendrée au-dessus de M_0' par $\overline{a}' \models \varphi(\overline{x},\overline{b}')$, et où $\overline{a}'$ est générique dans $\varphi_c(\overline{x},\overline{b}')$ au-dessus de M_0'. Alors, en utilisant (II) et (III), on voit que $\delta(\overline{a}'/M_0')$ vaut également $2k - n = e$. Par conséquent, on dit que $\varphi(\overline{x},\overline{z})$ est *de dimension e*.

Par ailleurs, on considère une $\mathcal{L}$-formule existentielle $\tau(\overline{x},\overline{z})$ telle que

(IV) $\models \tau(\overline{a}',\overline{b}')$ implique $\mathrm{d}(\overline{a}'/\overline{b}') < e$.

Maintenant, on peut définir $R_{\mathfrak{g}}$ comme suit :

Généricité Soient $\varphi(\overline{x},\overline{z}) := \varphi_c(\overline{x},\overline{z}) \wedge \varphi_{\ddot{\mathrm{U}}}(\overline{x},\overline{z})$ et $\tau(\overline{x},\overline{z})$ comme ci-dessus satisfaisant (I-IV) et soit $\overline{a}' \models \varphi_c(\overline{x},\overline{b}') \wedge \neg\tau(\overline{x},\overline{b}')$. Alors $\overline{a}'$ est générique dans $\varphi_c(\overline{x}, \overline{b}') \wedge \neg\tau(\overline{x}, \overline{b}')$ au-dessus de $B' \supseteq \overline{b}'$ si et seulement si $\mathrm{cl}_\omega(B')\overline{a}'$ est fort et $\overline{a}'$ est $\mathcal{L}_{rings}$-générique dans $\varphi_c(\overline{x}, \overline{b}')$ au-dessus de $\mathrm{cl}_\omega(B')$.

Ce sont les seules formules et types forts pour lesquels la généricité est définie.

La vérification que la relation $R_{\mathfrak{g}}$ ainsi définie est une bonne notion partielle de généricité est plus ou moins la même qu'avant : on montre d'abord que les formules de la forme $\varphi(\overline{x}, \overline{z}) \wedge \neg\tau(\overline{x}, \overline{z})$ sont jolies ; puis, on utilise le Lemme 5.2.3 pour montrer que les formules jolies sont cofinales dans des types p en question ; quant à la propriété (4) de la Défintion 5.1.1, elle se montre par une réduction au langage $\mathcal{L}_{rings}$, où la propriété correspondante est claire. $\square$

Bibliographie

[Ba88] J. T. Baldwin, *Fundamentals of Stability Theory*, Springer Verlag, 1988.

[Ba94] J. T. Baldwin, *An Almost Strongly Minimal non-Desarguesian Projective Plane*, Trans. AMS **342** (1994), 695–711.

[BH00] J. T. Baldwin et K. Holland, *Constructing ω-stable Structures : Rank 2 Fields*, J. Symbolic Logic **65** (2000), 371–391.

[BH01] J. T. Baldwin et K. Holland, *Constructing ω-stable Structures : Computing Rank*, Fundamenta Mathematicae **170** (2001), 1–20.

[BH04] J. T. Baldwin et K. Holland, *Constructing ω-stable Structures : Model Completeness*, Ann. Pure Appl. Logic **125** (2004), 159–172.

[BL71] J. T. Baldwin et A. Lachlan, *On Strongly Minimal Sets*, J. Symbolic Logic **36** (1971), 79–96.

[BS01] J. T. Baldwin et S. Shelah, *Model Companions of T_{Aut} for stable T*, Notre Dame J Formal Logic **42** (2001), 129–142.

[Ba96] A. Baudisch, *A New Uncountably Categorical Group*, Trans. AMS **348** (1996), 3889–3940.

[BHMW06] A. Baudisch, M. Hils, A. Martin-Pizarro et F. O. Wagner, *Die böse Farbe*, prépublication, 2006 (disponible sur la page
http ://math.univ-lyon1.fr/ wagner/).

[BMZ06] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro et M. Ziegler, *On Fields and Colors*, Algebra i Logika **45(2)** (2006).

[BMZ05a] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro et M. Ziegler, *Fusion over a Vector Space*, prépublication, 2005 (disponible sur la page
http ://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/).

[BMZ05b] A. Baudisch, A. Martin-Pizarro et M. Ziegler, *Red Fields*, prépublication, 2005 (disponible sur la page
http ://home.mathematik.uni-freiburg.de/ziegler/).

[Be04] I. Ben-Yaacov, *Lovely Pairs of Models : the non first order Case* J. Symbolic Logic **69** (2004), 641–662.

[BPV03] I. Ben-Yaacov, A. Pillay et E. Vassiliev, *Lovely Pairs of Models*, Ann. Pure Appl. Logic **122** (2003), 235–261.

[Bu86] S. Buechler, *Locally Modular Theories of Finite Rank*, Ann. Pure Appl. Logic **30**, 83–95.

[Bu91] S. Buechler, *Pseudoprojective Strongly Minimal Sets are Locally Projective*, J. Symbolic Logic **56** (1991), 1184–1194.

[Bu06] R. Bustamante-Medina, *Differentially Closed Fields with a Generic Automorphism*, prépublication, 2006.

[CHKP02] O. Chapuis, E. Hrushovski, P. Koiran et B. Poizat, *La limite des théories de courbes génériques*, J. Symbolic Logic **67** (2002), 24–34.

[CH99] Z. Chatzidakis et E. Hrushovski, *Model Theory of Difference Fields*, Trans. AMS **351** (1999), 2997–3071.

[CP98] Z. Chatzidakis et A. Pillay, *Generic Structures and Simple Theories*, Ann. Pure Appl. Logic **95** (1998), 71–92.

[CHL85] G. Cherlin, L. Harrington et A. Lachlan, $\aleph_0$*-Categorical,* $\aleph_0$*-Stable Structures*, Ann. Pure Appl. Logic **28** (1985), 103–135.

[CH03] G. Cherlin et E. Hrushovski, *Finite Structures with Few Types*, Annals of Mathematics Studies **152**, Princeton University Press, 2003.

[Co77] P. M. Cohn, *Skew Field Constructions*, London Math. Soc. Lecture Note Series **27**, Cambridge University Press, 1977.

[Fr54] R. Fraïssé, *Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **71** (1954), 363–388.

[Go89] J. B. Goode, *Hrushovski's Geometries*, Proceedings of the 7th Easter Conference on Model Theory, Seminarberichte Humboldt-Universität Berlin **104** (1989), 106–117.

[GR90] H. P. Gute et K. K. Reuter, *The Last Word on Elimination of Quantifiers in Modules*, J. Symbolic Logic **55** (1990), 670–673.

[Ha04] A. Hasson, *Collapsing Structure and a Theory of Envelopes*, prépublication, 2004 (disponible sur la page http ://www.maths.ox.ac.uk/ hasson/).

[HH06] A. Hasson et M. Hils, *Fusion over Sublanguages*, J. Symbolic Logic **71** (2006), 361–398.

[Ho99] K. Holland, *Model Completeness of the New Strongly Minimal Sets*, J. Symbolic Logic **64** (1999), 946–962.

[Hr85] E. Hrushovski, *Locally Modular Regular Types*, dans : J. T. Baldwin (éd.), *Classification Theory*, Lecture Notes in Mathematics **1292**, 132–164, Proceedings of the USA-Israel Conference on Classification Theory (Chicago 1985), Springer-Verlag Berlin.

[Hr88] E. Hrushovski, *A Stable* $\aleph_0$*-Categorical Pseudoplane*, notes non-publiées, 1988.

[Hr92] E. Hrushovski, *Strongly Minimal Expansions of Algebraically Closed Fields*, Israel J. Math. **79** (1992), 129–151.

[Hr93] E. Hrushovski, *A New Strongly Minimal Set*, Ann. Pure Appl. Logic **62** (1993), 147–166.

[Hr96] E. Hrushovski, *The Mordell-Lang Conjecture for Function Fields*, J. of AMS **9** (1996) 667–690.

[Hr98] E. Hrushovski, *Simplicity and the Lascar Group*, prépublication, 1998.

[Hr01] E. Hrushovski, *The Manin-Mumford Conjecture and the Model Theory of Difference Fields*, Ann. Pure Appl. Logic **112** (2001), 43–115.

[Hr02] E. Hrushovski, *Pseudofinite Fields and Related Structures*, dans : Model Theory and Applications (éds : L. Bélair et al.), Quad. Mat. **11**, Aracne, Rome 2002, 151–212.

[Hr04] E. Hrushovski, *The Elementary Theory of the Frobenius Automorphisms*, prépublication, 2004 (arXiv :math.LO/0406514).

[HP87] E. Hrushovski et A. Pillay, *Weakly Normal Groups*, dans : Logic colloquium '85 (éd. Équipe de logique de Paris 7), Stud. Logic Found. Math. **122**, North-Holland, Amsterdam, 1987, 233–244.

[HZ96] E. Hrushovski et B. Zilber, *Zariski Geometries*, J. AMS **9** (1996), 1–56.

[KS02] H. Kikyo et S. Shelah, *The Strict Order Property and Generic Automorphisms*, J. Symbolic Logic **67** (2002), 214–216.

[Ki98] B. Kim, *Forking in Simple Unstable Theories*, J. London Math. Soc. **57** (1998), 257–267.

[KP97] B. Kim et A. Pillay, *Simple Theories*, Ann. Pure Appl. Logic **88** (1997), 149–164.

[Ko03] A.Kolesnikov, *n-Simple Theories*, prépublication, 2003 (disponible sur la page http ://www.math.cmu.edu/ alexei/).

[Pi96] A. Pillay, *Geometric Stability Theory*, Clarendon Press, Oxford 1996.

[Pi02] A. Pillay, *Notes on model companions of stable theories with an automorphism*, prépublication, 2002 (disponible sur la page http ://www.math.uiuc.edu/People/pillay.html).

[Po83] B. Poizat, *Paires de structures stables*, J. Symbolic Logic **48** (1983), 239–249.

[Po99] B. Poizat, *Le carré de l'égalité*, J. Symbolic Logic **64** (1999), 1339–1355.

[Po01] B. Poizat, *L'égalité au cube*, J. Symbolic Logic **66** (2001), 1647–1676.

[Sc02] T. Scanlon, *Diophantine Geometry of the Torsion of a Drinfeld Module*, J. Number Theory **97** (2002), 10–25.

[Sh80] S. Shelah, *Simple Unstable Theories*, Ann. Math. Logic **19** (1980), 177–203.

[Sh90] S. Shelah, *Classification Theory* (revised), North-Holland, Amsterdam 1990.

[Va03] E. Vassiliev, *Generic Pairs of* SU*-rank 1 Structures*, Ann. Pure Appl. Logic, **120** (2003), 103–149.

[Wa94] F. O. Wagner, *Relational Structures and Dimensions*, dans : R. Kaye et D. MacPherson (éds), Automorphism Groups of first-order Structures, 153–180, Oxford University Press, Oxford 1994.

[Wa00] F. O. Wagner, *Simple Theories*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Pays-Bas 2000.

[Wa04] F. O. Wagner *Some Remarks on One-basedness in Simple Theories*, J. Symbolic Logic **69** (2004), 34–38.

[Zi93] B. Zilber, *Uncountably Categorical Theories*, Translations of Math. Monographs **117**, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1993.

Index